

**Поволжский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики**

Факультет ИСТ

Кафедра ИВТ

Конспект лекций

"Программирование в системе MATLAB"  
Разработка программ для ЦОС

Автор-составитель:

Акчурин Э.А.

д.т.н., профессор

Самара

2012



Факультет информационных систем и технологий  
Кафедра «Информатика и вычислительная техника»

Автор - д.т.н., профессор Акчурин Э.А.



Другие материалы по дисциплине Вы найдете на сайте

[www.ivt.psati.ru](http://www.ivt.psati.ru)

# Оглавление

1. Введение .....	5
1.1. Литература .....	5
1.2. Инструментарий .....	5
1.3. Основные определения .....	6
2. Обобщенная схема ЦОС .....	7
2.1. Классификация сигналов .....	9
2.2. Системы сигналов .....	10
3. Типовые сигналы .....	11
3.1. Импульсные сигналы .....	11
3.2. Скачкообразные сигналы .....	12
3.3. Сигналы в форме показательных функций .....	13
3.4. Гармонические сигналы .....	14
4. Математические основы анализа сигналов .....	15
4.1. Преобразование Фурье .....	15
4.2. Дискретное преобразование Фурье .....	16
4.3. Оконное ДПФ .....	18
4.4. Преобразование Лапласа .....	21
4.5. Дискретное преобразование Лапласа .....	22
4.6. Z-преобразование .....	22
4.7. Основы ОС .....	25
4.8. Представления сигналов .....	25
4.9. Представление во временной области .....	26
4.9.1. Импульсная и переходная характеристики .....	26
4.9.2. Разностное уравнение .....	27
4.10. Представление в Z-области .....	28
4.10.1. Передаточная функция .....	28
4.11. Представление в частотной области .....	29
4.11.1. Частотная характеристика .....	29
4.11.2. Фазовая и групповая задержка .....	30
4.12. Устойчивость ЛДС .....	30
5. Методы и алгоритмы ЦОС .....	30
5.1. Обобщенная схема ЦОС .....	30
5.2. Основные направления, задачи и алгоритмы ЦОС .....	35
6. Эффекты квантования в цифровых системах .....	36
6.1. Форматы представления чисел .....	36
6.2. Представление целых чисел .....	36
6.3. Формат с фиксированной точкой .....	37
6.4. Формат с плавающей точкой .....	38
6.5. Процесс квантования .....	39
6.5.1. Шум квантования .....	39

6.5.2. Ошибки округления .....	40
6.5.3. Предельные циклы .....	41
6.6. Функции MATLAB для квантования .....	42
6.6.1. Функции квантования .....	42
7. Модуляция и демодуляция .....	43
7.1. Введение .....	43
7.2. Функции MATLAB для модуляции и демодуляции .....	43
7.3. Модемы аналоговых сигналов.....	44
7.3.1. Модемы с АМ.....	46
7.3.2. Модемы с угловой модуляцией.....	54
7.3.3. Модем с КАМ .....	62
7.3.4. Модемы с импульсным переносчиком .....	65
7.3.5. Сравнение разных видов модуляции .....	67
7.4. Способы модуляции для передачи данных .....	67
7.4.1. Цифровые модемы в MATLAB .....	68
7.4.2. Треллис-модуляция .....	78
8. Цифровая фильтрация .....	79
8.1. Передаточные функции ЦФ .....	79
8.2. Проектирование фильтров .....	80
8.3. КИХ фильтры.....	81
8.3.1. КИХ с равномерными пульсациями (Equiripple) .....	81
8.3.2. КИХ по методу наименьших квадратов (Least-squares).....	82
8.3.3. Оконный КИХ (Window).....	83
8.4. БИХ фильтры .....	86
8.4.1. БИХ фильтр Баттерворта .....	87
8.4.2. БИХ фильтр Чебышева 1 типа.....	89
8.4.3. БИХ фильтр Чебышева 2 типа.....	91
8.4.4. Эллиптический БИХ фильтр (Кауэра, Золотарева).....	93
8.5. Структуры ЦФ .....	95
8.6. Прямые формы.....	96
8.6.1. Каноническая форма .....	97
8.6.2. Транспонированные формы.....	98
8.7. Проектирование и анализ ЦФ в MATLAB.....	101
8.7.1. Программа интерактивного расчета ФНЧ .....	101
8.7.2. fdatool – инструмент для проектирования фильтров .....	103

## 1. Введение

Дисциплина " Основы обработки информации и ЦОС " для специальности 220400

Семестр	6
Лекции	18
Лабораторные занятия	32
Самостоятельная работа	30
Контроль	Зачет

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – это область науки и техники, в которой изучаются алгоритмы и средства обработки сигналов на основе численных элементов с использованием цифровой электроники. ЦОС может использоваться в разных предметных областях.

### 1.1. Литература

1. Сергиенко А. Цифровая обработка сигналов. СПб: Питер, 2003. 608 с.
2. Солонина А. и др. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. СПб: БХВ-Петербург, 2003. 608 с.
3. Дьяконов В. MATLAB 6/6.1/6.5+Simulink 4/5. Основы применения. М.: СОЛОН-Пресс, 2004. 768 с.
4. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003, – 1104 стр.
5. Акчурин Э. Оптимизация обработки сигналов путем модульной структуризации. М.: Радио и связь, 2000, 331 с.
6. Акчурин Э. "Программирование в системе MATLAB". Часть 1. Использование MATLAB и Simulink. МУ к ЛР. Самара: ПГАТИ, 2004, 51 с.

### 1.2. Инструментарий

Для анализа систем ЦОС употребляется программный инструментарий. Это системы компьютерной математики (СКМ) Mathcad, Maple, Mathematica, MATLAB. Наибольшее распространение в России имеют:

- Mathcad для математических расчетов.
- MATLAB для моделирования. Содержит много встроенных пакетов расширения для работы в конкретных предметных областях, а также пакет имитационного моделирования Simulink. Мы будем широко использовать эту СКМ.

MATLAB - одна из старейших, тщательно проработанных и проверенных временем СКМ, построенная на расширенном представлении и применении мат-

ричных операций. Это нашло отражение в названии системы - MATrix LABoratory (матричная лаборатория). Однако эта ориентация почти не ощущается теми пользователями, которых не интересуют непосредственно матричные вычисления. MATLAB постоянно совершенствуется, в новых версиях:

- используется свой интерфейс,
- изменяется список и содержание пакетов расширения, что вызвано разработкой новых функций и усовершенствованием существующих,
- из функционально одинаковых функций разных пакетов сохраняются только наилучшие,
- используются демонстрационные программы (Demos) только для новейших технологий.

В этой связи пользователь, ознакомившись с литературой по предыдущим версиям, может обнаружить в новой версии некоторые отличия. Мы используем версию MATLAB 7.01 (иначе 14 выпуск), введенную в 2004 году.

СКМ MATLAB содержит четыре группы компонент:

- Продукты MATLAB. Это ядро системы и наборы универсальных функций.
- Toolboxes – инструментальные пакеты для MATLAB (универсальные и специализированные). Каждый набор содержит встроенные функции для определенной предметной области.
- Продукты Simulink. Это программа имитационного моделирования блочно организованных систем и поддерживающие ее средства.
- Blocksets – наборы блоков для имитационной модели Simulink. Каждый набор содержит блоки для определенной предметной области.

### 1.3. Основные определения

Обработка сигналов (ОС) – это область науки и техники, в которой изучаются алгоритмы и средства обработки сигналов. ОС может быть:

- аналоговой (АОС),
- цифровой (ЦОС).

АОС осуществляется с использованием физических устройств, реализующих алгоритм обработки. Например, аналоговый фильтр может использовать набор конденсаторов и индукторов. Часто АОС реализует алгоритм обработки приближенно с побочными эффектами. Многие алгоритмы с помощью АОС не могут быть реализованы, так как нет физических устройств, способных выполнить требуемые операции.

ЦОС не требует особых физических устройств, нужен только цифровой процессор обработки сигналов (ЦПОС). Можно реализовать любой алгоритм об-

работки, формализованный и математически описанный. Многие алгоритмы ОС можно реализовать только с использованием ЦОС.

Исторически ЦОС возникла на основе цифровой реализации алгоритмов АОС, ее стали употреблять для улучшения показателей систем. На первом этапе внедрение ЦОС ограничивалось экономическими факторами. В дальнейшем стоимость средств ЦОС непрерывно снижалась, ЦОС стала все больше заменять АОС.

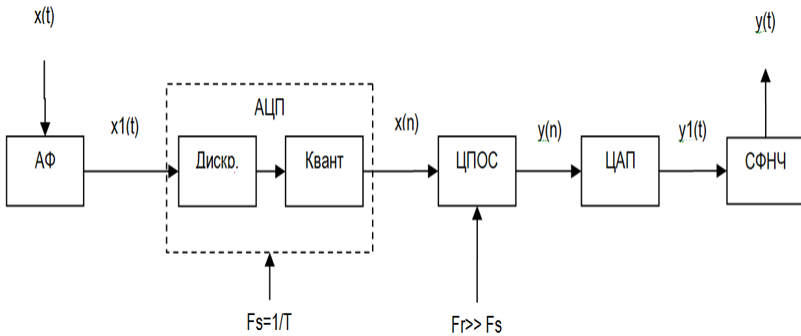
ЦОС может использоваться в разных предметных областях. Для нее не имеет значения физическая природа сигналов, важен лишь способ их математического представления. Например, это могут быть сигналы:

- в телекоммуникационных системах,
- от датчиков электро медицинских устройств,
- от датчиков сейсмографических систем.

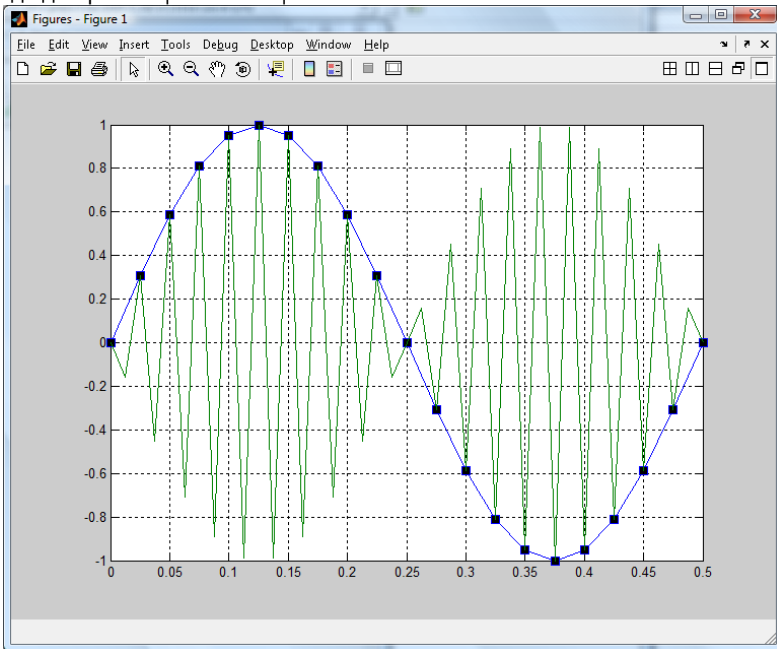
## 2. Обобщенная схема ЦОС

Процесс ЦОС включает три этапа:

- Формирование цифрового сигнала  $x(n)$  из аналогового сигнала  $x(t)$ . Эта задача решается с помощью антиэлайзингового фильтра (АФ) и аналого-цифрового преобразователя (АЦП). АФ предотвращает помехи, вызванные размножением спектров при дискретизации. АЦП содержит два встроенных узла – дискретизатор и квантизатор. В первом из аналогового сигнала  $x(t)$  выбираются дискретные отсчеты с интервалом  $T$ , квантизатор из них вырабатывает цифровой сигнал  $x(n)$ . Значения  $x(n)$  имеют погрешность по отношению к отсчетам из сигнала  $x(t)$ , величина которых зависит от ошибок квантования при округлениях. Чтобы уменьшить эту погрешность нужно увеличивать разрядность АЦП, что технически не просто.
- Преобразование входного цифрового сигнала  $x(n)$  в выходной цифровой сигнал  $y(n)$  по заданному алгоритму ЦОС. Это осуществляет ЦПОС. В нем исполняется программа, реализующая заданный алгоритм. Эта программа должна успеть выполнить все расчеты по вычислению очередного выходного отсчета за время, не превышающее период дискретизации  $T$ . Поэтому ЦПОС должен работать с тактовой частотой  $f_r$ , значительно большей частоты дискретизации  $f_d=1/T$ .
- Формирование выходного аналогового сигнала  $y(t)$  из выходного цифрового сигнала  $y(n)$ . Эта задача решается с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и сглаживающего фильтра нижних частот. В ЦАП выходной цифровой сигнал  $y(n)$  преобразуется в непрерывный сигнал  $y_1(t)$  ступенчатой формы. СФНЧ сглаживает ступеньки, в результате чего формируется выходной аналоговый сигнал  $y(t)$ .



Антиэлайзинговый фильтр подавляет помехи, накладываемые на полезный сигнал из-за размножения спектра при дискретизации. Спектры сигнала при дискретизации размножаются со сдвигом  $2*F_s$ . Отсчеты для сигналов с частотами  $F_1$  и  $F_2 = F + 2*F_s$ , отличающимися на  $2*F_s$ , совпадают. Это показано на диаграммах таких сигналов. Маркерами показаны отсчеты. Видно, что для этих сигналов отсчеты совпадают. Компонента с частотой  $F_2$  должна быть подавлена до дискретизации с помощью АФ.

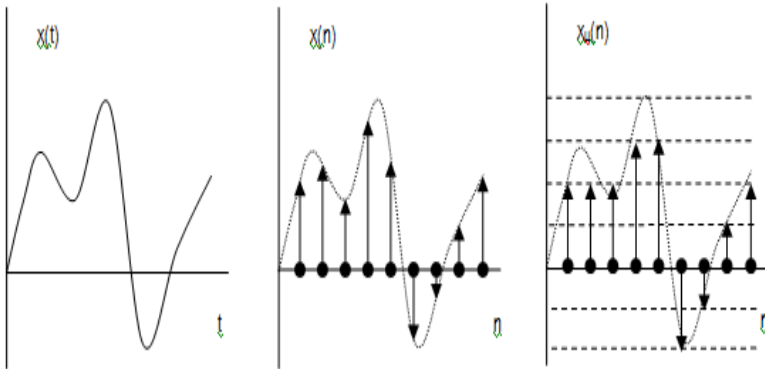




## 2.1. Классификация сигналов

Сигнал – это зависимость одной величины от другой. Физическая природа сигнала может быть разной. Чаще всего сигналы рассматриваются, как зависимости во времени. В зависимости от того, известен ли нам сигнал точно или нет, различают детерминированные и случайные сигналы.

По структуре различают аналоговый, дискретный и цифровой сигналы. Аналоговым называется сигнал, непрерывный во времени и по значениям. Он описывается непрерывной функцией  $x(t)$ , аргумент  $t$  и сама функция  $x$  могут принимать любые значения на заданных интервалах (рисунок слева).



Дискретным называется сигнал, дискретный во времени и непрерывный по значениям. Он описывается решетчатой функцией  $x(nT)$ , в которой  $n$  - номер отсчета ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Интервал  $T$  называется периодом дискретизации, а  $F_s = 1/T$  частотой дискретизации. Решетчатая функция определена только в моменты времени  $nT$  и может принимать любые значения в заданном интервале. Значения решетчатой функции называются отсчетами. Часто для цифрового сигнала применяют нормированное время  $nT/T = n$  (фактически это номер отсчета, рисунок в центре).

Цифровым называется сигнал, дискретный во времени и по значениям. Он также описывается решетчатой функцией  $x(n)$ , которая может принимать конечные значения в заданном интервале. Возможные значения решетчатой функции называются уровнями квантования, а функции квантованными (рисунок, справа). Из-за квантования отсчеты неточно совпадают со значениями сигнала. Это приводит к появлению в цифровом сигнале шума квантования.

Сигналы могут быть описаны во временной или частотной области. В частотной области сигналы представляют суммой гармонических компонент, каждая из которых имеет амплитуду  $A_0$ , стандартную частоту  $f_0$  (число периодов в се-

кунду, единица измерения Гц) или угловую частоту  $\omega_0 = 2\pi f_0$  (единица измерения Рад/с), начальную фазу  $\varphi_0$  (единица измерения радианы или градусы). Представление сигнала в частотной области часто бывает более информативное, чем во временной области. Например, речевой сигнал нагляднее представляется суммой (спектром) гармонических компонент с частотами 0,3...3,4 кГц.

Любой периодический сигнал с периодом  $T_0$  может быть представлен рядом Фурье (гармоническим рядом). Частотная составляющая  $f_0 = 1/T_0$  называется основной гармоникой. Частотные составляющие вида  $N \cdot f_0$  ( $N=2, 3..$ ) называют высшими гармониками. Чем больше сигнал отличается от гармонического, тем больше частотных составляющих в его спектре и тем меньше расстояние (разнос частот) между ними.

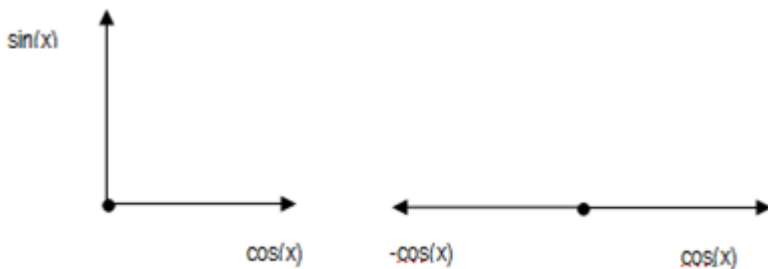
Случайные процессы, которыми являются практически все первичные сигналы, имеют непрерывный бесконечный спектр. Однако обычно основная мощность случайного сигнала сосредоточена в определенной полосе частот. Данное свойство реальных сигналов позволяет использовать для их передачи каналы с ограниченной полосой пропускания. Реальные каналы связи (например, радиоканалы) имеют полосу пропускания, не совпадающую со спектром первичного сигнала. Поэтому при передаче спектр сигнала должен быть перенесен в полосу пропускания канала, а при приеме извлечен оттуда. Первая операция называется модуляцией (ее выполняет модулятор), вторая - демодуляцией (ее выполняет демодулятор). Совокупность модулятор/демодулятор – это модем.

## 2.2. Системы сигналов

При передаче могут использоваться разные сигналы, которые необходимо отличить друг от друга. Мерой отличия сигналов на интервале времени  $T$  может служить функция их взаимной корреляции

$$R = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t) dt$$

Чем меньше  $R$ , тем менее похожи сигналы друг на друга. Сигналы, для которых  $R=0$  называются ортогональными. Пример ортогональных сигналов  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ . Векторы этих сигналов взаимно перпендикулярны, проекция одного на другой равна 0. Сигналы, которые в векторном представлении являются зеркальным отображением друг друга, называются антиподными. При векторном представлении мерой отличия сигналов может служить расстояние между концами их векторов (норма разности  $NR$ ). Ниже показаны ортогональные с  $NR=1.41$  (слева) и антиподные с  $NR=2$  (справа) сигналы при длинах векторов 1.



### 3. Типовые сигналы

В системах ОС в качестве испытательных воздействий применяются типовые сигналы.

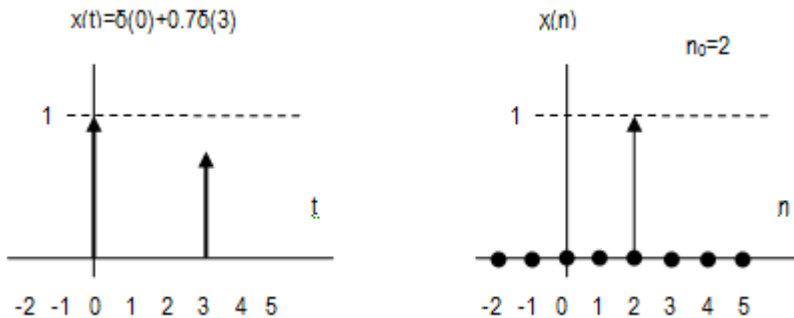
#### 3.1. Импульсные сигналы

Дельта-функция (она же функция Дирака), используется в аналоговых системах. Это функция бесконечно малой длительности, с бесконечным значением и площадью 1. Функция не может быть реализована физически, но важна в теоретическом анализе систем. На графиках дельта-функция обычно отображается жирной стрелкой, высота которой равна множителю, стоящему перед ней в уравнении системы (на рисунке слева).

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Цифровой единичный импульс Это аналог дельта-функции для дискретных систем (на рисунке справа).

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$



### 3.2. Скачкообразные сигналы

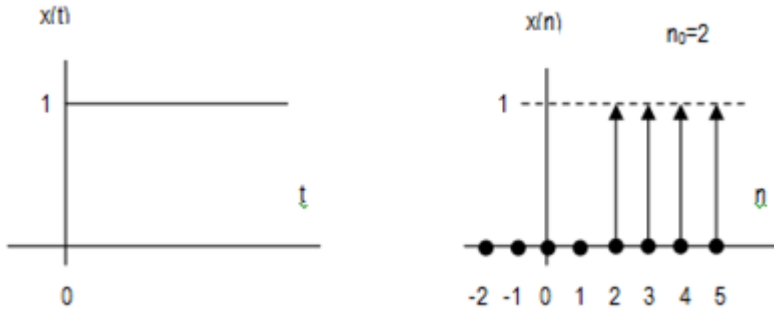
Функция единичного скачка (она же функция Хевисайда, или функция включения), используется в аналоговых системах (рисунок, слева).

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Функцию  $\sigma(t)$  часто используют для формирования прямоугольного импульса длительностью  $T$  в виде разности двух скачков, сдвинутых во времени на  $T$ :  $x(t) = \sigma(t) - \sigma(t-T)$ .

Цифровой единичный скачек. Это аналог единичного скачка в аналоговых системах (рисунок, справа).

$$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$



### 3.3. Сигналы в форме показательных функций

Комплексная показательная функция. Может быть представлена, как произведение вещественной и мнимой показательных функций.

$$x(t) = a^{pt} = a^{(\sigma + j\omega)t} = a^{\sigma} a^{j\omega t}$$

Комплексная экспонента. Это частный случай показательной функции при  $a=e=2.718\dots$  ( $e$  - основание натурального логарифма). Может быть представлена, как произведение вещественной и мнимой экспонент.

$$x(t) = \exp(pt) = \exp((\sigma + j\omega)t) = \exp(\sigma) \exp(j\omega t)$$

Вещественная экспонента. Это вещественная функция, значения которой изменяются во времени в зависимости от значения  $\sigma$ . При  $\sigma > 0$  экспонента нарастает, при  $\sigma < 0$  спадает.

$$x(t) = \exp(\sigma t)$$

Мнимая экспонента. Это комплексная функция, имеет фиксированную амплитуду. По формуле Эйлера может быть представлена в виде суммы квадратурных компонент (косинусной – вещественная часть, синусной – мнимая часть). В литературе ее иногда называют комплексной экспонентой по типу возвращаемого значения. Мы будем использовать термин мнимая экспонента, имея в виду ее аргумент.

$$x(t) = \exp(j\omega t) = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

Дискретная показательная функция. Это аналог вещественной показательной функции для дискретных систем.

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

### 3.4. Гармонические сигналы

Гармонические сигналы могут представляться, как вещественные

$$x(t) = X(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

$X(t)$  – амплитуда, которая может зависеть от времени,

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота,

$f$  – циклическая частота,

$\varphi$  – фаза в радианах.

или комплексные

$$x(t) = \begin{cases} X1(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) - j \cdot X2(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \\ [(X1(t) + j \cdot X2(t)) \cdot \exp(j\varphi)] \cdot \exp(j\omega t) \end{cases},$$

$X1(t)$  – амплитуда вещественной составляющей (иначе синфазной),

$X2(t)$  – амплитуда мнимой составляющей (иначе квадратурной).

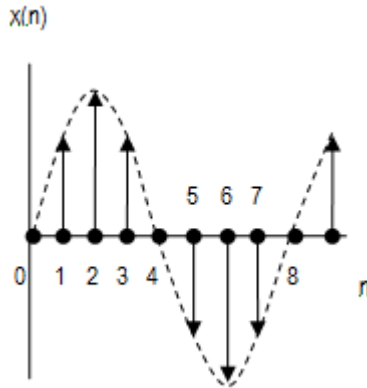
В системах связи для составляющих такого сигнала применяют термины:

- Переносчик первичного сигнала (или несущая - carrier), это  $\exp(j\omega t)$ .
- Комплексная огибающая, это

$$X(t) = X1(t) + j \cdot X2(t) \cdot \exp(j\varphi),$$

- Дискретные гармонические сигналы - это аналоги описанных сигналов для дискретных систем. В них непрерывное время  $t$  заменяется на дискретное  $t=nT$ .
- Дискретная мнимая экспонента. Это аналог мнимой экспоненты для дискретных систем.

$$x(n) = A \cdot e^{j\omega T n} = A \cos(\omega T n) + jA \sin(\omega T n)$$



## 4. Математические основы анализа сигналов

### 4.1. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье (ПФ) - это инструмент для анализа непериодических сигналов.

Прямое ПФ заменяет непрерывную функцию времени  $x(t)$ , существующую всегда, спектром в базисе мнимых экспонент  $\exp(-pt)$ .  $p = j2\pi f$  – оператор ПФ. Мнимая экспонента имеет частоту  $f$  и может быть представлена суммой косинусной и синусной компонент по формуле Эйлера. Результатом ПФ является образ Фурье  $F(p)$  в  $p$ -плоскости.

#### Прямое ПФ

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

#### Обратное ПФ

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \exp(j2\pi ft) df$$

ПФ можно использовать и для периодических сигналов. В этом случае из  $x(t)$  делается выборка, равная одному периоду. Для остальных моментов времени период выборки повторяется.

## 4.2. Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) - это инструмент для анализа дискретных периодических сигналов.

Прямое ДПФ заменяет набор  $N$  отсчетов  $x(k)$ , интерпретируемых как один период сигнала, спектром в базисе мнимых экспонент из  $N$  составляющих. Каждая мнимая экспонента имеет частоту, определяемую номером  $n=0\dots N$ , и может быть представлена суммой косинусной и синусной компонент по формуле Эйлера. Результатом ДПФ является образ Фурье  $DF(n)$  в базисе мнимых экспонент.

Для расчета ДПФ нужно задать  $N$  – число отсчетов и гармоник. В настоящее время для ДПФ применяется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), в котором  $N$  должно быть равно двум в целой степени. Например, возможно  $N=256=2^8$ .

### Прямое ДПФ

$$DF(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j \frac{2\pi nk}{N})$$

### Обратное ДПФ

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} DF(n) \exp(j \frac{2\pi nk}{N})$$

Свойства ДПФ:

- Линейность. Если для двух последовательностей равной длины  $x_1(k)$  и  $x_2(k)$  известны Фурье образы  $DF_1(n)$  и  $DF_2(n)$ , то для суммы  $x_1(k)+x_2(k)$  Фурье образ  $DF(n) = DF_1(n)+DF_2(n)$ .
- Задержка. Если  $x_2(k)=x_1(k-1)$ , то  $DF_2(n)=DF_1(n) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi n/N)$ .
- Симметрия.  $DF(n-1)=DF(-n)$ . Гармоника с отрицательным номером – это сопряженный комплекс гармоники с положительным номером.
- Постоянная составляющая  $DF(0) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$ .
- Произведение последовательностей одинаковой длины. Если  $x_3(k)=x_1(k) \cdot x_2(k)$ , то спектр произведения - круговая свертка спектров сомножителей

$$DF_3(n) = DF_1(n)DF_2(n)$$



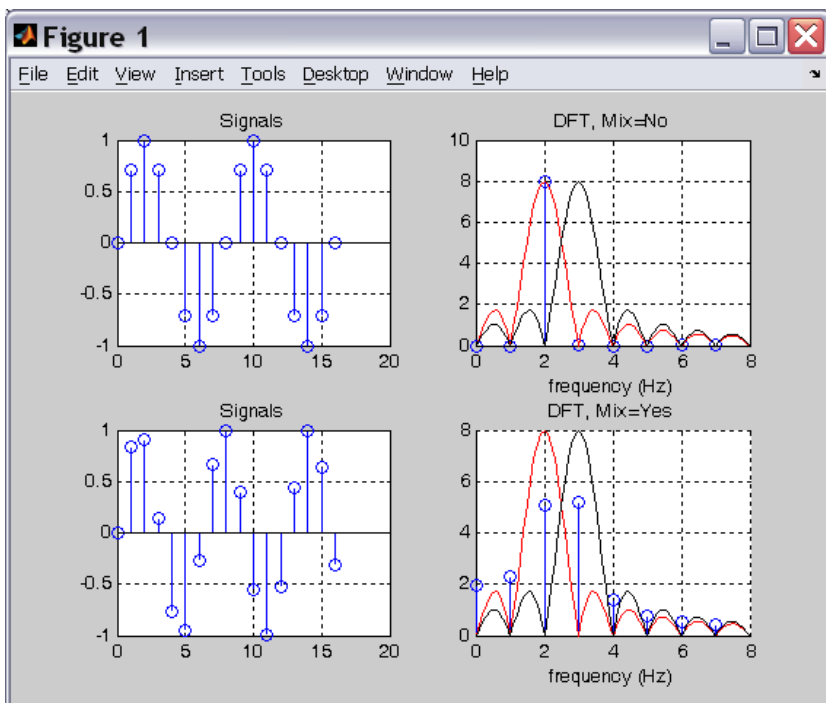
ДПФ представляет сигнал в виде суммы мнимых экспонент с фиксированными частотами. Структуру ДПФ можно представить, как набор фильтров, каждый из которых выделяет одну экспоненту. АЧХ одного фильтра ДПФ имеет отклик 1 на частоте выделяемой фильтром экспоненты, на частотах выше и ниже форма АЧХ - затухающая синусоида с нулями на частотах других экспонент. В зависимости от соотношения частоты сигнала с частотами фильтров ДПФ возможны два режима:

- «Кратный», когда в выборке ДПФ умещается целое число периодов сигнала. В этом случае частота сигнала совпадает с одной из частот экспонент, выделяемых ДПФ.
- «Растекание», когда в выборке ДПФ не умещается целое число периодов сигнала. В этом случае частота сигнала не совпадает с одной из частот экспонент, выделяемых ДПФ.

В примере показано ДПФ от синусоидального сигнала. Представлены две пары графиков, верхняя для «кратного» режима, нижняя для режима с «растеканием». В каждой паре слева маркерами отображены отсчеты сигнала, справа его ДПФ. Отсчеты ДПФ показаны маркерами. Для иллюстрации «растекания» для двух соседних частот ДПФ линиями разного цвета отображены их АЧХ.

В «кратном» режиме для разных периодов сигнала отсчеты попадают на одни и те фазы. В частотной области частота сигнала равна частоте экспоненты ДПФ, и на нее откликается только один фильтр ДПФ. Для других фильтров частота сигнала попадает в точки нулей их АЧХ. В результате ДПФ точно отображает спектр сигнала, имея один отсчет.

В режиме «растекания» для разных периодов сигнала отсчеты попадают на разные фазы. В частотной области частота сигнала не равна частоте экспоненты ДПФ, и на нее откликается несколько фильтров ДПФ. В результате ДПФ отображает спектр сигнала не точно, имея несколько отсчетов в окрестности частоты сигнала. «Растекание» наиболее заметно, когда частота сигнала размещается в середине интервала частотной сетки ДПФ.

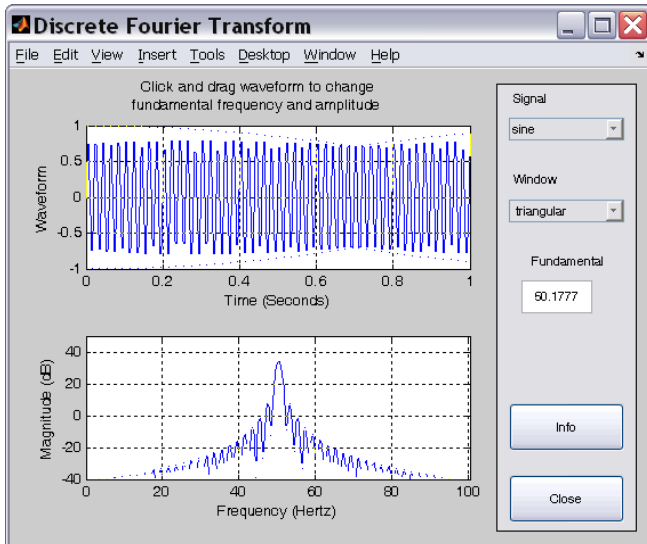
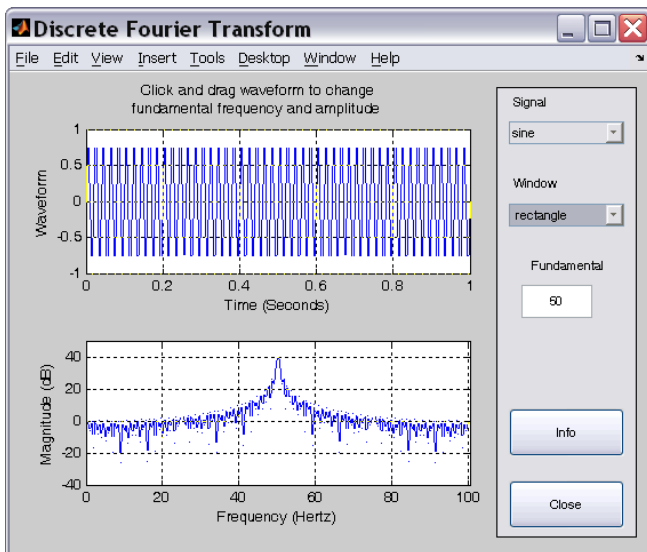


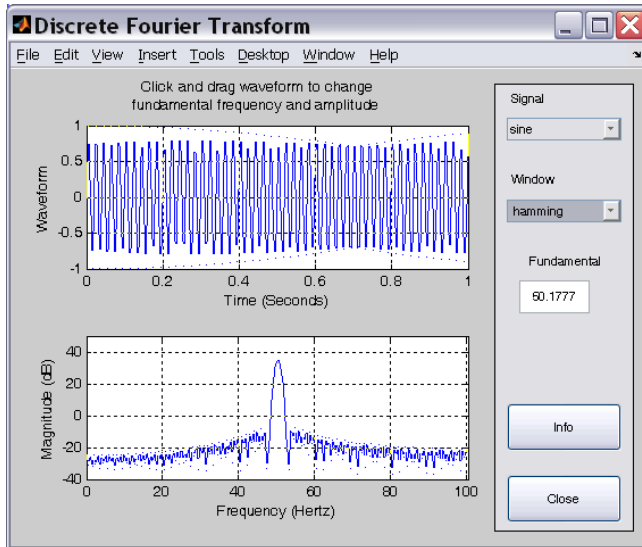
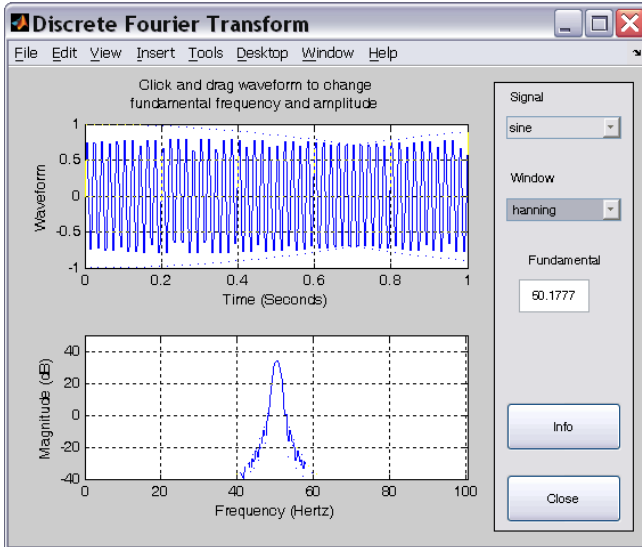
### 4.3. Оконное ДПФ

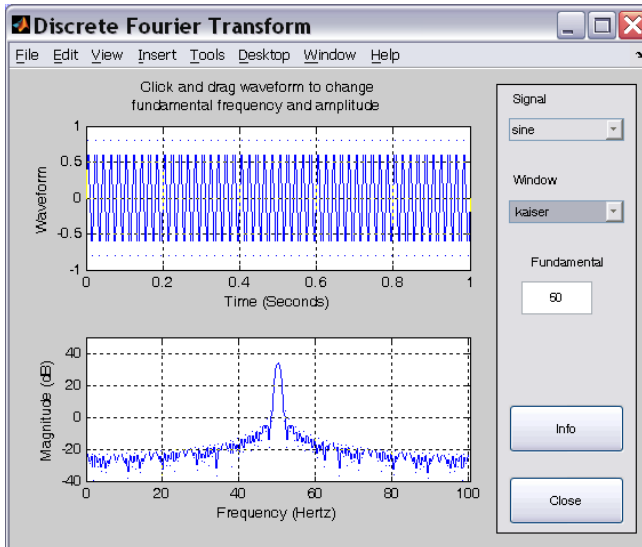
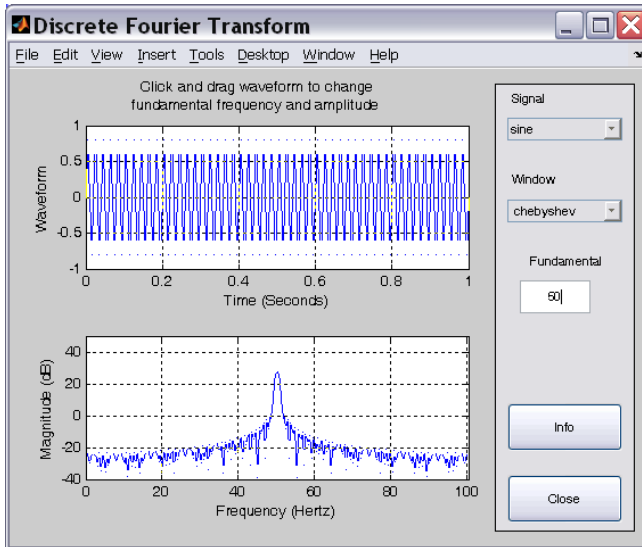
Реальные сигналы могут иметь разный спектральный состав в различные интервалы времени. Например, звуковой сигнал в разные интервалы времени может иметь компоненты с различными частотами (например, скрипка, барабан). Для спектрального анализа локализованных во времени сигналов применяется оконное ДПФ. Из исходного сигнала умножением на оконную функцию выделяется фрагмент, к которому применяется ДПФ. Предложено много оконных функций. Ниже представлены спектры синусоидального сигнала, полученные встроенным в MATLAB инструментом DFT (Discrete Fourier Transformation) для основных оконных функций:

- прямоугольной,
- треугольной,
- Хеннинга,
- Хемминга,
- Чебышева,
- Кайзера.

Во всех спектрах пик на частоте исходного сигнала.







#### 4.4. Преобразование Лапласа

Прямое преобразование Лапласа (ПЛ) заменяет непрерывную функцию  $x(t)$ , существующую с начального момента времени, равного 0, спектром в базе комплексных экспонент  $\exp(-pt)$ .  $p = \sigma + j\omega$  – оператор Лапласа. Экспонента

имеет угловую частоту  $\omega$  и может быть во времени нарастающей (при  $\sigma > 0$ ) или спадающей (при  $\sigma < 0$ ). Результатом преобразования является образ  $X(p)$  в  $p$ -плоскости.

### Прямое ПЛ

$$L(p) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-pt) dt$$

### Обратное ДПЛ

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(p) \exp(pt) dp$$

$C$  – любой замкнутый контур, охватывающий начало координат  $p$ -плоскости и особые точки подинтегральной функции.

ПЛ по сравнению с ПФ более сложны. Однако они имеют и преимущества:

- позволяют анализировать функции, существующие на ограниченном интервале времени.
- импульсная характеристика линейной системы – это ПЛ от ее передаточной функции.

## 4.5. Дискретное преобразование Лапласа

Дискретное преобразование Лапласа (ДПЛ) получается из непрерывного ПЛ заменой интегралов на суммы.

### Прямое ДПЛ

$$DL(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \exp(-pkT)$$

### Обратное ДПЛ

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C DL(p) \exp(pkT) dp$$

## 4.6. Z-преобразование

Для дискретных сигналов и систем вместо ДПЛ удобно использовать Z-преобразование. Оно получается из ДПЛ подстановкой  $z = \exp(pT) = R + jI$ .

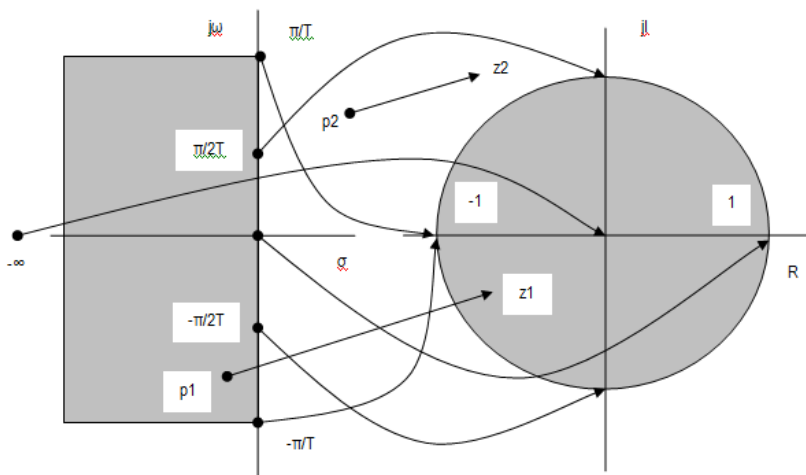
Прямое Z-преобразование

$$Z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}.$$

Обратное Z-преобразование

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C Z(z)z^{k-1} dz.$$

Соответствие между p- и Z-плоскостями показано на рисунке.



p - плоскость	z - плоскость
$\sigma=0 \quad j\omega=0$	$R=1 \quad I=0 \quad z=1$
$\sigma=0 \quad j\omega=\pi/2T$	$R=0 \quad I=1 \quad z=j$
$\sigma=0 \quad j\omega=-\pi/2T$	$R=0 \quad I=-1 \quad z=-j$
$\sigma=0 \quad j\omega=\pm\pi/T$	$R=-1 \quad I=0 \quad z=-1$
$\sigma=-\infty \quad j\omega=0$	$R=0 \quad I=0 \quad z=0$
Мнимая ось, $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$	$ z =1$ , единичная окружность, один оборот
Левая полуплоскость основного сечения в пределах $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$	Внутренняя часть единичного круга $ z <1$ ,
Правая полуплоскость основного сечения в пределах $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$	Плоскость вне единичного круга $ z >1$ ,
Другие вертикальные сечения шириной $2\pi/T$	Дубль основного сечения

Дублирование основного сечения означает, что сигналы с частотами за пределами основного сечения при дискретизации смешиваются с сигналами основного сечения. Этот процесс называется размножением (или растеканием) спектра. Для борьбы с ним применяются антиэлайзинговые фильтры, выделяющие перед дискретизацией только сигналы основного сечения.

### Свойства Z-преобразования:

- **Линейность.** Если для двух последовательностей  $x_1(k)$  и  $x_2(k)$ , имеющих одинаковую длину, известны образы  $Z_1(n)$  и  $Z_2(n)$ , то для их суммы  $Z(n) = Z_1(n) + Z_2(n)$ .
- **Задержка.** Если  $x_2(k) = x_1(k - n_3)$ , то  $Z_2(n) = Z_1(n) \cdot z^{-n_3}$ .
- **Произведение последовательностей одинаковой длины.** Если  $x_3(k) = x_1(k) \cdot x_2(k)$ , то Z-образ произведения - круговая свертка Z-образов множителей

$$Z_3(n) = Z_1(n) \cdot Z_2(n).$$

Для восстановления оригинала по его Z-образу используется обратное Z-преобразование. Это достаточно сложная математическая задача. Поэтому на практике часто используют готовые решения, размещенные в таблицах соответствия. Некоторые примеры соответствий:

Последовательность $x(n)$	Z - образ
$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	1
$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$	$z^{-n_0}$
$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}$	$\frac{z^{-n_0}}{1 - z^{-1}}$
$x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$



## 4.7. Основы ОС

Система ОС осуществляет преобразование  $F$  воздействия  $X$  в реакцию  $Y$ . Соотношение вход-выход описывается уравнением системы в операторной форме  $Y=F(X)$ , где

- $X$  – множество воздействий, это вектор из функций времени.
- $Y$  – множество реакций, это вектор из функций времени.
- $F$  – оператор отображения множества  $X$  в множество  $Y$ .

Для системы с одним входом и одним выходом имеем  $y=F(x)$ .

Система называется линейной, если она обладает свойствами:

- аддитивности - реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий (принцип суперпозиции).
- однородности - воздействие, умноженное на коэффициент, соответствует реакции, умноженной на тот же коэффициент.

В линейной системе оператор  $F$  линейный, он включает только алгебраические операции сложения, вычитания и умножения на весовые коэффициенты.

В линейной системе возможна задержка реакции относительно воздействия на время  $t_{\text{зап}}$ .

О линейности системы можно судить по амплитудной характеристике ( $A\omega$ ), графически интерпретирующей уравнение системы  $y(x)$ . У линейной системы  $A\omega$  имеет вид прямой линии.

Для любой системы ОС необходимо описать:

- сигналы системы (воздействие и реакцию),
- саму систему, для которой определяют: характеристики системы, соотношение вход-выход.

## 4.8. Представления сигналов

Системы могут анализироваться в различных областях:

- Временная область используется для представления сигналов, как функций времени. Этот способ хорошо описывает сигналы с характерной формой (например, импульсные сигналы).
- $Z$ - область. Используется для упрощения анализа систем с ЦОС. Позволяет превратить уравнения, описывающие систему, в алгебраические.
- Спектральная область позволяет рассматривать сигнал, как сумму базовых сигналов определенной формы (это и есть спектр). Широко распро-

странен базис синусоидальных сигналов с разными частотами. В этом случае спектральную область называют частотной.

В каждой области для описания сигналов и системы используются свои переменные и функции. При переходе от одного представлению к другому переменные и функции нужно преобразовать.

## 4.9. Представление во временной области

### 4.9.1. Импульсная и переходная характеристики

Импульсная характеристика (ИХ) линейной системы - это реакция при нулевых начальных условиях на:

- дельта-функцию для линейной аналоговой системы (ЛАС),
- единичный цифровой импульс для линейной дискретной системы (ЛДС).

Линейная аналоговая система (ЛАС)			Линейная дискретная система (ЛДС)		
Воздействие	Реакция	Начальные условия	Воздействие	Реакция	Начальные условия
$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$	$h(t)$	$x(t) \equiv 0, t < 0$ $y(t) \equiv 0, t < 0$	$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	$h(n)$	$x(n) \equiv 0, n < 0$ $y(n) \equiv 0, n < 0$

Под нулевыми начальными условиями понимается отсутствие реакции на отсутствие воздействия. Начальные условия отвечают принципу причинности – реакция не может возникнуть раньше воздействия.

Переходная характеристика (ПХ) линейной системы - это реакция при нулевых начальных условиях на:

- единичный скачок для ЛАС,
- единичный цифровой скачок для ЛДС.

Линейная аналоговая система (ЛАС)			Линейная дискретная система (ЛДС)		
Воздействие	Реакция	Начальные условия	Воздействие	Реакция	Начальные условия

$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < \\ 1/2, & t \\ 1, & t > \end{cases}$	$\sigma(t)$	$x(t) \equiv 0, t$ $y(t) \equiv 0, t$	$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \\ 0, & n \end{cases}$	$\sigma(nT)$	$x(n) \equiv 0, n$ $y(n) \equiv 0, n$
--	-------------	--	---	--------------	--

Зная ИХ, можно найти реакцию ЛДС на воздействие с использованием формулы свертки. Импульсная характеристика обычно имеет достаточную длину. Поэтому реакция на каждом такте зависит от нескольких отсчетов воздействия. Суммарная реакция определяется формулой свертки

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(k-i).$$

Вычисление свертки можно представить как суммирование локальных произведений двух последовательностей - ИХ и воздействия. При этом ИХ фиксирована во времени, а воздействие зеркально отображается относительно начала координат и скользит по оси времени слева направо.

#### 4.9.2. Разностное уравнение

Разностное уравнение (РУ) ЛДС задает правило прямого определения реакции. В ЛДС реакция в каждый момент времени определяется:

- текущим воздействием,
- предисторией воздействия (набор задержанных входных отсчетов),
- предисторией реакции (набор задержанных выходных отсчетов).

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} a_i y(n-i)$$

Первая сумма в РУ (нерекурсивная часть) – учет текущего воздействия и его предистории, вторая сумма (рекурсивная часть) – учет предистории реакции. Значения N и M определяют порядок ЛДС. Он равен максимальному из M и N.

ЛДС называется *нерекурсивной*, если в РУ все коэффициенты a равны нулю. ИХ *нерекурсивной* ЛДС конечна, отсчеты ИХ равны коэффициентам b РУ. *Нерекурсивные* ЛДС называются системами с *Конечной Импульсной Характеристикой*, или кратко *КИХ-системами*. Пример *нерекурсивной* ЛДС второго порядка

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)$$

ЛДС называется рекурсивной, если в РУ хотя бы один коэффициент  $a$  отличен от нуля. ИХ рекурсивной ЛДС бесконечна, так как обратная связь приводит к бесконечной циркуляции отсчетов. Рекурсивные ЛДС называются системами с Бесконечной Импульсной Характеристикой, или сокращенно БИХ-системами. Примеры рекурсивных ЛДС:

- первого порядка

$$y(n) = b_0x(n) - a_1y(n-1)$$

- второго порядка

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

ЛДС имеет свойство памяти, определяющее способность помнить предисторию воздействия. Нерекурсивная ЛДС должна помнить  $N-1$  предшествующих отсчетов воздействия, длительность памяти у нее равна  $N-1$ .

## 4.10. Представление в Z-области

### 4.10.1. Передаточная функция

Передаточная функция (ПФ) это Z-образ ИХ ЛДС, определяется по формуле прямого Z-преобразования.

$$H(z) = Z(h(n)).$$

ПФ можно представить, как отношение Z-образов реакции и воздействия:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Из РУ ЛДС для ПФ можно получить выражение, из которого следует, что ПФ ЛДС определяется исключительно внутренними параметрами ЛДС и не зависит ни от воздействия, ни от реакции.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{N-1-i}}{1 + \sum_{i=0}^{M-1} a_i z^{M-1-i}}$$

Примеры ПФ ЛДС:

**ЛДС первого порядка**

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

**ЛДС второго порядка**

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

ПФ характеризуется своими особыми точками (полюсами) и нулями. Полюса – это значения  $z$ , при которых знаменатель ПФ равен 0. Нули – это значения  $z$ , при которых числитель ПФ равен 0.

Картой полюсов и нулей называется отображение их на  $z$ -плоскости. Нули отображаются кружочками, полюса звездочками или крестиками.

#### **4.11. Представление в частотной области**

Представление ЛДС в частотной области позволяет выявить ряд особенностей, скрытых при описании во временной области и в  $z$ -области. Например, частотное представление полезно при анализе звуковых сигналов.

##### **4.11.1. Частотная характеристика**

Частотная характеристика (ЧХ) это образ Фурье ИХ ЛДС.

$$H(j\omega) = F(h(n)) = A(j\omega) \exp(\varphi(j\omega))$$

Это комплексная функция, которая в экспоненциальном представлении имеет модуль и фазу.:

- Модуль  $A(j\omega)$  - это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ). Это частотная зависимость отношения амплитуды реакции к амплитуде гармонического воздействия в установившемся режиме.
- Фаза  $\varphi(j\omega)$  – фазочастотная характеристика (ФЧХ). Это частотная зависимость разности фаз реакции и гармонического воздействия в установившемся режиме.

При дискретизации происходит размножение спектра. Спектральные полосы шириной  $f_d$  дублируются. Диапазон частот в окрестности нулевой частоты от  $-f_d/2$  до  $f_d/2$  называется основным. Именно он используется при ЦОС.

## 4.11.2. Фазовая и групповая задержка

При преобразовании сигналов в системах ОС различают два вида задержки:

- Фазовая задержка (ФЗ). Определяется как отношение ФЧХ к частоте.
- Групповая задержка (ГВЗ). Это зависимость от частоты задержки во времени огибающей узкополосного сигнала со средней частотой  $\omega$ . Определяется, как производная от ФЧХ. Чтобы реакция ЛДС отличалась от воздействия только сдвигом во времени без изменения формы, необходимо, чтобы ГВЗ не зависело от частоты. Для этого ФЧХ ЛДС должна быть линейной.

## 4.12. Устойчивость ЛДС

ЛДС называется устойчивой, если при ограниченном воздействии и произвольных начальных условиях реакция также ограничена. В неустойчивой ЛДС возможны автоколебания. В зависимости от области представления используют два критерия устойчивости ЛДС:

- ЛДС устойчива, если полюса ПФ находятся в левой комплексной полуплоскости.
- ЛДС устойчива, если полюса ПФ находятся внутри единичной окружности z-плоскости.

## 5. Методы и алгоритмы ЦОС

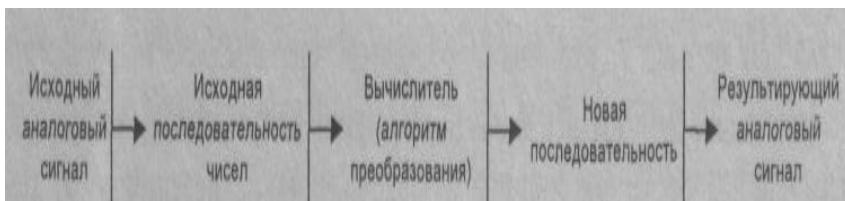
Прежде чем изучать принципы, лежащие в основе конструкции цифровых процессоров обработки сигналов (ЦПОС), целесообразно рассмотреть базовые методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов (ЦОС), которые оказали и продолжают оказывать непосредственное влияние как на всю элементную базу ЦОС, так, в частности, и на архитектуру ЦПОС. Знание методов и алгоритмов ЦОС, их особенностей, сложности, возможностей применения в разнообразных задачах позволяет оценить вычислительные проблемы, свойственные данному алгоритму в конкретном приложении, и выбрать оптимальную элементную базу для его реализации. Кроме того, это знание помогает понять, почему развитие цифровой вычислительной техники пришло к цифровым процессорам обработки сигналов.

Общие же проблемы ЦОС, характерные для любых алгоритмов, нетрудно обнаружить на обобщенной схеме цифровой обработки аналоговых сигналов, которую и рассмотрим.

### 5.1. Обобщенная схема ЦОС

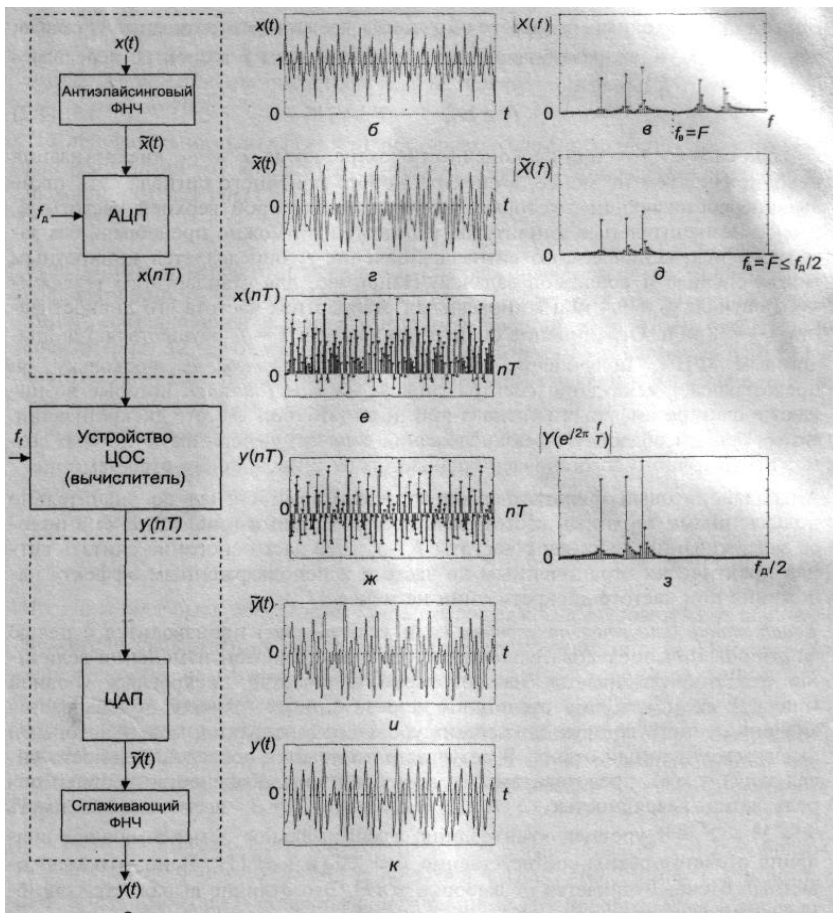
Цифровая обработка принципиально связана с представлением любого сигнала в виде последовательности чисел. Это означает, что исходный аналоговый

сигнал должен быть преобразован в исходную последовательность чисел, которая вычислителем по заданному алгоритму преобразуется в новую последовательность, однозначно соответствующую исходной.



Из полученной новой последовательности формируется результирующий аналоговый сигнал. Перечисленные преобразования должны происходить по определенным правилам, смысл которых отображен на рисунке, где показаны основные элементы обобщенной схемы ЦОС аналоговых сигналов:

- аналоговый антизалингующий фильтр низких частот (АФНЧ);
- аналого-цифровой преобразователь (АЦП);
- устройство ЦОС (вычислитель);
- цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП);
- аналоговый сглаживающий фильтр низких частот (СФНЧ).



На рисунке слева элементы ЦОС аналогового сигнала, справа временные и спектральные диаграммы на входе и выходе основных элементов. Устройство, объединяющее АФНЧ и АЦП, называется кодером. Кодер формирует последовательность чисел, соответствующую обрабатываемому аналоговому сигналу. Устройство, объединяющее ЦАП и СФНЧ, называется декодером. Декодер по принятому цифровому сигналу формирует аналоговый сигнал, т. е. производит преобразования, обратные происходившим в кодере.

На вход системы поступает ограниченный по длительности сигнал  $x(t)$ , имеющий в своем составе постоянную составляющую  $x_0=1$ , явно выраженные высокочастотные составляющие, которые несколько затемяют сигнал небольшими всплесками. Спектр амплитуд, или просто спектр, такого сигнала представлен



справа от сигнала. В силу конечной длительности сигнала его спектр бесконечен.

Бесконечность спектра является препятствием для преобразования сигнала  $x(t)$  в цифровую форму, что связано с природой аналого-цифрового преобразования, осуществляемого в два этапа: дискретизации по времени и квантования по уровню.

Дискретизация по времени (или дискретизация) представляет собой процедуру взятия мгновенных значений сигнала  $x(t)$  через равные промежутки времени  $T$ . Мгновенные значения  $x(nT)$  называются выборками, или отсчетами, время  $T$  — периодом дискретизации,  $n$  указывает порядковый номер отсчета. Ясно, что чем чаще брать отсчеты, т. е. чем меньше период дискретизации  $T$ , тем точнее последовательность отсчетов  $x(nT)$  будет отображать исходный сигнал  $x(t)$ . Период дискретизации  $T$  определяет частоту дискретизации  $F_s = 1/T$ .

Чем меньше  $T$ , тем выше  $F_s$ . С другой стороны, чем выше  $F_s$ , тем труднее вычислителю выполнять большое количество операций над отсчетами в темпе их поступления на переработку и тем сложнее должно быть его устройство.

Таким образом, точность представления сигнала требует увеличивать  $F_s$ , а стремление сделать вычислитель как можно более простым приводит к желанию понизить  $F_s$ . Однако существует ограничение на минимальное значение  $F_s$ : для полного восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам  $x(nT)$  необходимо и достаточно, чтобы  $F_s$  была, как минимум, в два раза больше наивысшей частоты  $F$  в спектре передаваемого сигнала  $x(t)$ , т. е.  $F_s > 2F$ .

Отсюда следует, что при бесконечном спектре, когда  $F$  стремится к бесконечности, дискретизация невозможна. Тем не менее, в спектре любого конечного сигнала есть такие высшие составляющие, которые, начиная с некоторой верхней частоты  $F_h$ , имеют незначительные амплитуды, и потому ими можно пренебречь без заметного искажения самого сигнала. Значение  $F_h$  определяется конкретным типом сигнала и решаемой задачей. Например, для стандартного телефонного сигнала  $F_h = 3,4$  кГц, минимальная стандартная частота его дискретизации  $F_s = 8$  кГц. Ограничение спектра до частоты  $F = F_h$  осуществляется аналоговым ФНЧ, получившим название антизализингового, поскольку он предотвращает искажения спектра типа наложения (aliasing), которые возникают в спектре цифрового сигнала при недостаточной  $F_s$ . Во временной области эффект наложения означает необратимую потерю возможности точного восстановления аналогового сигнала по его отсчетам.

Антизализинговый фильтр формирует аналоговый сигнал со значительно подавленными верхними частотными составляющими в полосе задерживания, начиная с частоты  $F_h$ . Это дает основание считать сигнал практически ограни-

ченным по частоте и неподверженным эффекту наложения при частоте дискретизации не менее  $2F$ .

Квантование отсчетов по уровням (или квантование) производится с целью формирования последовательности чисел: весь диапазон изменения величины отсчетов разбивается на некоторое количество дискретных уровней, и каждому отсчету по определенному правилу присваивается значение одного из двух ближайших уровней квантования, между которыми оказывается данный отсчет. В результате получается последовательность чисел  $x(nT) = x(n)$ , представляемых в двоичном коде. Количество уровней определяется разрядностью  $b$  АЦП; так, если  $b=3$ , всего можно иметь  $k=2^b=2^3=8$  уровней квантования, а минимальное и максимальное значения отсчетов равны соответственно 0 (000) и 7 (111). Ясно, что квантованный отсчет отличается от выборки  $x(nT)$ . Это отличие выражается ошибкой квантования

$$\varepsilon_{кв} = x_u(nT) - x(nT)$$

которая тем больше, чем меньше  $b$ . Максимальная ошибка квантования при использовании округления в качестве приближения равна половине шага квантования  $Q$

$$\max|\varepsilon_{кв}| = Q/2, \text{ где } Q = q_1 = 2^{-b}$$

Отсюда следует, что чем больше разрядность  $b$  АЦП, тем точнее представляется отсчет, но тем сложнее и дороже оказывается АЦП, который необходим для решения поставленной задачи. Современные АЦП имеют разрядность от 8 до 20.

Последовательность  $x(n)$  поступает на вычислитель, который по заданному алгоритму каждому отсчету ставит в однозначное соответствие выходной отсчет  $y(n)$ .

Результатом переработки исходного сигнала является новая цифровая последовательность — цифровой сигнал, уже не имеющий постоянной составляющей и существенно отличающийся от  $x(n)$ . Амплитудный спектр оказывается более обостренным на частотах, близких к частоте  $F_s/4$ . Количество операций (умножений, сложений, пересылок и т. д.) для получения одного отсчета  $y(n)$  может исчисляться тысячами, поэтому вычислитель должен работать на более высокой тактовой частоте  $F_r$ , чтобы успеть произвести все необходимые действия до поступления очередного отсчета  $x(n)$ , т. е. какой бы сложности ни был алгоритм, время переработки  $T_{пер}$  не должно превышать периода дискретизации  $T$ .

Но это может быть обеспечено лишь в случае, когда тактовая частота  $f$  вычислителя  $F_f$  существенно превышает частоту дискретизации  $F_s$ . Именно при этих условиях возможна работа вычислителя в реальном времени, т. е. в темпе поступления входных отсчетов. Например, при обработке стандартного телефонного сигнала с частотой дискретизации 8 кГц для обеспечения работы вычислителя в реальном времени тактовая частота должна быть равной, по крайней мере, 6 МГц, как в процессоре первого поколения TMS320C10.

Полученные выходные отсчеты подаются на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), формирующий ступенчатый сигнал  $y(n)$ , который затем с помощью сглаживающего фильтра НЧ преобразуется в аналоговый непрерывный сигнал  $y(t)$ .

Из всего сказанного вытекает ряд ограничений, влияющих на характер и выбор элементной базы для реализации вычислителя:

- разрядность регистров должна быть большой и превышать разрядность ЦАП во избежание дополнительных ошибок при округлении результатов вычислений;
- тактовая частота, на которой работает вычислитель, должна в сотни раз превосходить частоту дискретизации, если предъявляется требование реального времени;
- малое энергопотребление;
- компактность.

## **5.2. Основные направления, задачи и алгоритмы ЦОС**

Среди многочисленных задач, решаемых на базе ЦОС, можно выделить группу наиболее полно характеризующих как традиционные, так и нетрадиционные области применения ЦОС. Каждая задача, в зависимости от конкретного приложения, может решаться с использованием различных методов и алгоритмов; например, задача выделения сигнала из помех может решаться методами линейной, адаптивной и нелинейной фильтрации. В свою очередь, цифровая линейная фильтрация может быть осуществлена алгоритмами КИХ или БИХ фильтрации. В настоящее время выделяют следующие основные направления ЦОС:

- линейная фильтрация;
- спектральный анализ;
- частотно-временной анализ;
- адаптивная фильтрация;
- нелинейная обработка;
- многоскоростная обработка.

№	Направление	Примеры задач
1.	Линейная фильтрация	Селекция сигнала в частотной области; синтез фильтров, согласованных с сигналами; частотное разделение каналов; цифровые преобразователи Гильберта и дифференциаторы; корректоры характеристик каналов
2.	Спектральный анализ	Обработка речевых, звуковых, сейсмических, гидроакустических сигналов; распознавание образов
3.	Частотно-временной анализ	Компрессия изображений, гидро- и радиолокация, разнообразные задачи обнаружения
4.	Адаптивная фильтрация	Обработка речи, изображений, распознавание образов, подавление шумов, адаптивные антенные решетки
5.	Нелинейная обработка	Вычисление корреляций, медианная фильтрация; синтез амплитудных, фазовых, частотных детекторов, обработка речи, векторное кодирование
6.	Многоскоростная обработка	Интерполяция (увеличение) и децимация (уменьшение) частоты дискретизации в многоскоростных системах телекоммуникации, аудиосистемах

## 6. Эффекты квантования в цифровых системах

### 6.1. Форматы представления чисел

Для представления чисел при ЦОС используются две группы форматов:

- с фиксированной точкой
- с плавающей точкой.

### 6.2. Представление целых чисел

Для представления знака числа используется старший двоичный разряд. При этом могут использоваться разные коды:

- Прямой код. Старший разряд кодирует знак числа, 0 - плюс, 1 – минус. Остальные разряды кодируют модуль числа. Код удобен для умножений (знаковые разряды обрабатываются операцией «Исключающее ИЛИ»),

модули перемножаются), но неудобен для сложений. Есть и проблема двух представлений нуля (с разными знаками).

Дополнительный код. Старший разряд кодирует знак числа, 0 - плюс, 1 - минус. Положительные числа представляются, как в прямом коде. Для смены знака числа все его разряды, включая знаковый, инвертируются, а к получившемуся двоичному результату прибавляется 1. Дополнительный код удобен для операций сложения, числа со знаком складываются, как беззнаковые.

Обратный. Старший разряд кодирует знак числа, 0 - плюс, 1 - минус. Остальные разряды кодируют модуль числа. Для смены знака числа все его разряды, включая знаковый, инвертируются. Код не находит применения.

Смещенный. Трактовка знакового разряда противоположна предыдущим кодам, 1 - плюс, 0 - минус. Для представления числа в этом коде к нему добавляется константа  $2^N-1$ , где N - число двоичных разрядов числа (не считая знакового).

В таблице показано соответствие двоичного представления целого числа десятичному значению при использовании разных кодов.

Двоичное представление	Значение без знака	Значение со знаком			
		Прямой	Дополнительный	Обратный	Смещенный
00000000	0	0	0	0	-127
00000001	1	1	1	1	-126
...	...	...	...	...	...
01111110	126	126	126	126	-1
01111111	127	127	127	127	0
10000000	128	0	-128	-127	1
10000001	129	-1	-127	-126	2
...	...	...	...	...	...
11111110	254	-126	-2	-1	127
11111111	255	-127	-1	0	128

### 6.3. Формат с фиксированной точкой

Число в формате с фиксированной точкой обозначают, как M.N. Под число отводится определенное число разрядов, из которых M - целая часть и знак (на рисунке серая штриховка), N - дробная часть. Это означает фиксацию положения точки, разделяющей целую и дробную части числа.

Знак									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Для кодирования в этом формате используется дополнительный код. В качестве примера рассмотрим часто применяемый в ЦПОС код 1.15. В нем целая часть равна 0 (1 знаковый разряд), все числа дробные с модулем от 0 до 1. Для получения значения числа в этом формате нужно разделить целое в дополнительном коде, соответствующее двоичному представлению числа, на  $2^N=2^{15}=32768$ .

Двоичное представление	16-ричное представление	Целое в дополнительном коде	Число в формате 1.15
0000 0000 0000 0000	0000	0	0
0000 0000 0000 0001	0001	1	1/32768
0000 0000 0000 0010	0002	2	2/32768
...	...	...	...
0111 1111 1111 1110	7FFE	32766	32766/32768
0111 1111 1111 1111	7FFF	32767	32767/32768
1000 0000 0000 0000	8000	-32768	-32768/32768
1000 0000 0000 0001	8001	-32767	-3267/32768
...	...	...	...
1111 1111 1111 1110	FFFE	-2	-2/32768
1111 1111 1111 1111	FFFF	-1	-1/32768

В СКМ MATLAB применяется другая трактовка формата:

- M – общее число разрядов,
- N – число разрядов дробной части.

Формат 1.15 интерпретируется как 16.15.

#### 6.4. Формат с плавающей точкой

Число в формате с плавающей точкой представляется в виде

$$x = M \cdot 2^P, \text{ где}$$

M – значащая часть (мантисса), это число в формате с фиксированной точкой.

P – порядок, это целое число со знаком.

Число в формате с плавающей точкой обозначают, как MeP, e – символ, разделяющий мантиссу и порядок. Под число отводится определенное число разрядов. Старший разряд отводится под знак (0 кодирует плюс, 1 – минус). Фик-

сированное число разрядов отводится под мантиссу М (серая штриховка) и порядок Р.

Знак									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

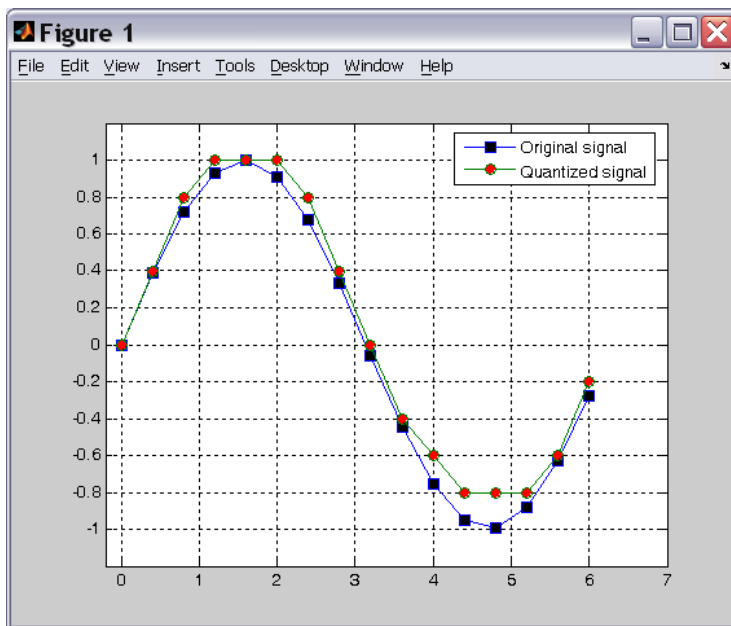
Для кодирования в этом формате используются:

- прямой код для мантиссы, как облегчающий умножения.
- смещенный код для порядка, как обеспечивающий представление целых чисел со знаком без дублирования нуля.

## 6.5. Процесс квантования

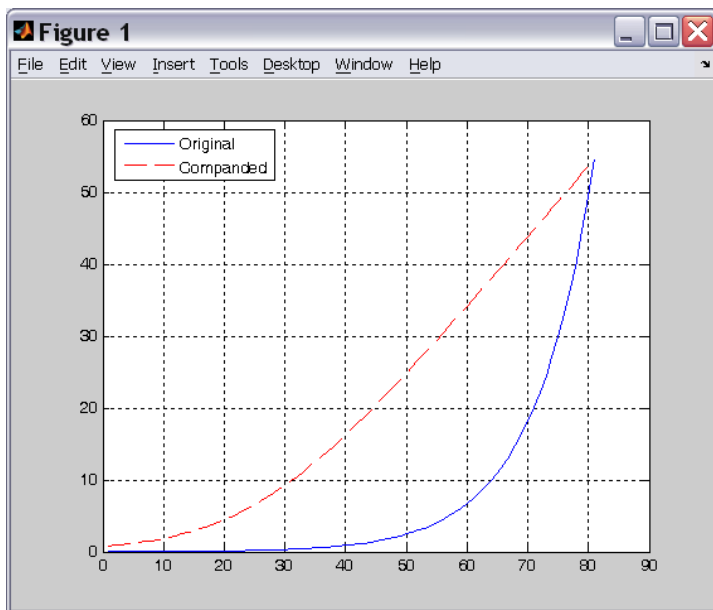
### 6.5.1. Шум квантования

При квантовании дискретные отсчеты сигнала заменяются квантованными по уровню значениями. Это приводит к ошибке, которая называется шумом квантования. Самая большая ошибка происходит тогда, когда отсчет дискретного сигнала попадает в середину между соседними уровнями квантования. Таким образом, максимальная ожидаемая ошибка квантования равна половине шага квантования.



При допустимой ошибке квантования  $\Delta$  шаг квантования должен быть  $2\Delta$ . При размахе квантуемого сигнала  $A$  число уровней квантования должно быть  $A/2\Delta$ . Число уровней квантования в  $Q$ -разрядном АЦП равно  $2Q$ . Отсюда следует, что необходимое  $Q = \log_2(A/\Delta) - 1$ . Например, при  $\Delta = A/1024$  нужен АЦП с  $Q = 9$ .

При квантовании сигналов, изменяющихся в очень широких пределах, для снижения требований к АЦП используется неравномерное квантование. Перед АЦП динамический диапазон сигнала сжимается компрессором. После ЦОС динамический диапазон восстанавливается экспандером. Законы сжатия и расширения взаимно обратны. Компрессор преобразует экспоненциальный закон изменения к почти линейному. Шаг квантования в итоге делается зависимым от уровня квантуемого сигнала. В АЦП для сжатого сигнала ошибки уменьшаются.



### 6.5.2. Ошибки округления

При реализации фильтров в ЦПОС его коэффициенты приходится округлять. В результате характеристики фильтра отличаются от заданных. Степень отличия зависит от типа фильтра и его структуры:

- В КИХ фильтрах разница малозаметна.
- В БИХ фильтрах, использующих структуру в прямых формах, разница может быть огромной (особенно для фильтров с крутыми скатами АЧХ).



Вы получите совсем не то, что хотели.

- В БИХ фильтрах, использующих структуру с параллельным соединением звеньев малого порядка, разница меньше.
- В БИХ фильтрах, использующих структуру с каскадным соединением звеньев малого порядка, разница самая маленькая. По этой причине для БИХ фильтров практически используется именно такая структура.

При реализации фильтров в ЦПОС выполняется множество суммирований частных произведений. При этом возможно возникновение переполнений, когда результат суммирования выходит за пределы разрядной сетки ЦПОС, что катастрофически искажает работу фильтра. Для борьбы с переполнениями используются:

- ЦПОС в формате с плавающей точкой. Это снижает скорость работы и повышает стоимость устройства
- Каскадная структура с масштабирование отсчетов между звеньями каскада.

### 6.5.3. Предельные циклы

Ошибки округления в БИХ устройстве могут вызвать его неустойчивость. В примерах рассмотрены две БИХ-системы. Для каждой приведены последовательности отсчетов без округления и с округлением.

n	$y(n) = 0.95y(n-1), y(0)=13$		$y(n) = -0.95y(n-1), y(0)=13$	
	Без округления	С округлением	Без округления	С округлением
1.	$0,95 \cdot 13 = 12.35$	$0,95 \cdot 13 = 12.35$ $\Rightarrow 12$	$-0,95 \cdot 13 = -12.35$	$-0,95 \cdot 13 = -12.35$ $\Rightarrow -12$
2.	$0,95 \cdot 12.350 = 11.732$	$0,95 \cdot 12 = 11.4$ $\Rightarrow 11$	$-0,95 \cdot (-12.350) = 11.732$	$-0,95 \cdot (-12) = 11.4$ $\Rightarrow 11$
3.	$0,95 \cdot 11.732 = 11.146$	$0,95 \cdot 11 = 10.45$ $\Rightarrow 10$	$-0,95 \cdot 11.732 = -11.146$	$-0,95 \cdot 11 = -10.45$ $\Rightarrow -10$
4.	$0,95 \cdot 11.146 = 10.588$	$0,95 \cdot 10 = 9.5$ $\Rightarrow 10$	$-0,95 \cdot (-11.146) = 10.588$	$-0,95 \cdot (-10) = 9.5$ $\Rightarrow 10$
5.	$0,95 \cdot 10.588 = 10.059$	$0,95 \cdot 10 = 9.5$ $\Rightarrow 10$	$-0,95 \cdot 10.588 = -10.059$	$-0,95 \cdot 10 = -9.5$ $\Rightarrow -10$
6.	$0,95 \cdot 10.059 = 10.059$	$0,95 \cdot 10 = 9.5$ $\Rightarrow 10$	$-0,95 \cdot (-10.059) = 10.059$	$-0,95 \cdot (-10) = 9.5$ $\Rightarrow 10$
7.	далее убывание до 0	далее 10	далее убывание модуля до 0	далее чередование 10, -10

В первом случае возникло «залипание», во втором генерация паразитного колебания.

## 6.6. Функции MATLAB для квантования

### 6.6.1. Функции квантования

Функция	Описание
uencod	Квантователь, осуществляет равномерное квантование сигнала. Возвращает номера уровней квантованного сигнала. $y = \text{uencod}(x, n, v, \text{'signflag'})$ $y$ – номер уровня квантованного сигнала. $x$ – неквантованный сигнал. $n = 2 \dots 32$ – число двоичных разрядов квантизатора. $v$ – предельный модуль воздействия, по умолчанию 1, квантуется воздействие с диапазоном $-1 \dots 1$ . $\text{'signflag'}$ – способ нумерации уровней квантованного сигнала. При значении $\text{'unsign'}$ это целые числа от 0 до $2^n - 1$ (это режим по умолчанию). При значении $\text{'sign'}$ это целые числа от $-2^{n-1}$ до $2^{n-1}$ .
udecod	Обратна функции uencod. Возвращает квантованные значения по номерам уровней квантования. $x = \text{udecod}(y, n, v, \text{'saturatemode'})$ $x$ – значение квантованного сигнала. $y$ – номер уровня квантованного сигнала. $\text{'saturatemode'}$ – режим обработки, когда число разрядов $y$ больше, чем $n$ . При значении $\text{'saturate'}$ используются предельные уровни квантования (это режим по умолчанию). При значении $\text{'wgar'}$ лишние разряды игнорируются.
quantiz	Неравномерное квантование сигнала. Возвращает номера уровней квантованного сигнала. $[\text{index}, \text{quants}, \text{distor}] = \text{quantiz}(\text{sig}, \text{partition}, \text{codebook})$ Входные параметры функции: $\text{sig}$ – вектор отсчетов неквантованного сигнала. $\text{partition}$ – вектор границ зон квантования. $\text{codebook}$ – вектор уровней квантования. Функция возвращает матрицу, каждая строка которой содержит значения: $\text{index}$ – номер в векторе уровней. $\text{quants} = \text{codebook}(\text{index} + 1)$ – квантованное значение входного сигнала. $\text{distor}$ – средне-квадратичная ошибка квантования.
quantizer	Квантователь. Это расширение функции quantiz. Позволяет менять свойства, задавая значения параметров. $\text{quantizer}(\text{параметры})$ .

qfilt	Квантованный фильтр. qfilt('structure', {coef}, 'name1', value1, 'name2', value2,) 'structure' - строка идентификации структуры фильтра. {coef} – массив коэффициентов (формат зависит от структуры). 'name1', value1 – строковое имя параметра и его значение.
iimitcycle	Анализ предельных циклов.
qfft	БПФ с квантованием.

## 7. Модуляция и демодуляция

### 7.1. Введение

Физические свойства реального канала связи предъявляют требования к параметрам передаваемого по ним сигнала. Многие каналы связи (например, радиоканалы) имеют полосу пропускания, не совпадающую со спектром первичного сигнала. Например, для передачи речевого сигнала со спектром до 3,4 кГц с помощью радиоволн потребуется антенна размером около 25 км. Если же использовать передачу на частотах около 300 МГц потребуется антенна размерами меньше 1 м.

По этой причине при передаче спектр первичного сигнала должен быть перенесен в полосу пропускания канала, а при приеме извлечен оттуда. Первая операция называется модуляцией (ее выполняет модулятор), вторая - демодуляцией (ее выполняет демодулятор). Кроме того, применение модуляции позволяет передавать по одному и тому же каналу связи множество сигналов на разных несущих. Совокупность модулятор/демодулятор – это модем.

Для анализа модемов будем использовать инструментарий MATLAB.

### 7.2. Функции MATLAB для модуляции и демодуляции

В MATLAB для модуляции и демодуляции могут использоваться функции пакетов:

- Signal Processing.
- Communications.

Пакет Signal Processing имеет две функции модуляции и демодуляции:

modulate – модуляция,  
demod – демодуляция.

В них конкретный вид модуляции задается параметрами функций. Функции этого пакета применяются редко, так как работают удовлетворительно только с чистыми сигналами. Причина в использовании упрощенных реализаций алгоритмов.

Пакет Communications имеет два набора функций модуляции и демодуляции для двух представлений сигналов:

- Вещественного (passband – полосовой сигнал), которое используется для аналоговых методов модуляции. В этом случае обрабатывается весь модулированный сигнал.
- Комплексного (baseband – эквивалентный низкочастотный сигнал), которое используется для цифровых методов модуляции. В этом случае обрабатывается только комплексная огибающая модулированного сигнала. Вычисления происходят быстрее, но нет отображения тонкой структуры сигнала.

Каждый набор содержит функции для каждого вида модуляции. Для имен функций этого пакета в разных версиях MATLAB используются разные правила. В версии MATLAB 7.0 правила такие:

- первые буквы имени функции обозначают вид модуляции,
- далее mod – модуляция, demod - демодуляция.

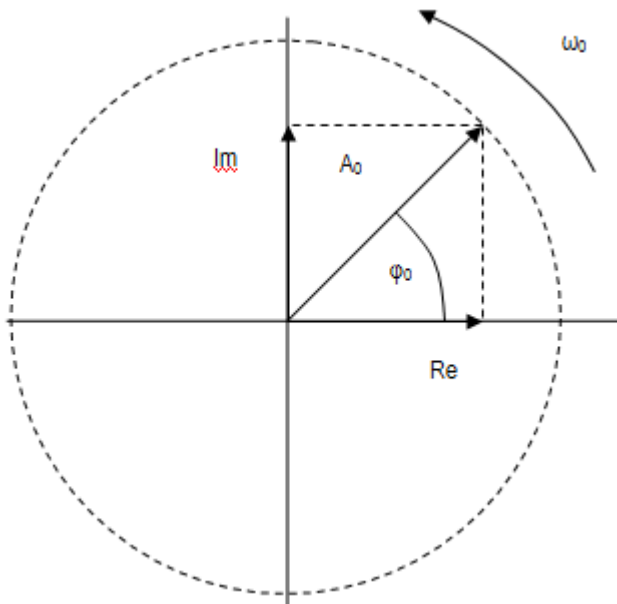
### 7.3. Модемы аналоговых сигналов

По реальным физическим каналам связи можно передавать сигналы (их называют вторичными), отвечающие определенным требованиям:

- По радиоканалу можно передавать сигналы, имеющие заданный частотный спектр. В частности невозможно передать сигналы констант.
- По оптоволоконному каналу следует передавать импульсные сигналы.

При передаче необходимы преобразования первичных сигналов во вторичные и обратно. В пункте передачи модулятор переносит первичный сигнал в полосу пропускания канала с использованием сигнала переносчика (carrier). При модуляции первичный сигнал меняет какой либо параметр переносчика. На приемной стороне демодулятор осуществляет обратный процесс – демодуляцию, когда путем анализа меняющегося параметра переносчика первичный сигнал восстанавливается. Модем – это совокупность модулятора и демодулятора.

Для визуализации сигналов в модемах часто используется их отображение в амплитудно-фазовой плоскости в виде вращающегося против часовой стрелки вектора. Вектор сигнала можно представить в виде суммы векторов: синфазного (Re) и квадратурного (Im). Длина вектора соответствует амплитуде гармонического сигнала  $A_0$ , угол относительно синфазной составляющей - начальной фазе  $\varphi_0$ . Значение сигнала может быть представлено в виде точки, соответствующей концу вектора. Такое представление часто используется для описания видов модуляции в современных модемах.



В качестве переносчика часто применяется гармонический сигнал

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Для такого переносчика по типу изменяемого параметра различают:

- амплитудную модуляцию (АМ), изменяется амплитуда  $A$ ,
- частотную модуляцию (ЧМ), изменяется угловая частота  $\omega_0$ ,
- фазовую модуляцию (ФМ), изменяется начальная фаза  $\varphi_0$ .

При ЧМ и ФМ изменяемый параметр влияет на аргумент модулируемой функции. Поэтому для них применяют и общий термин - угловая модуляция (УМ).

В качестве переносчика может использоваться периодическая последовательность импульсов

$$s(t) = A \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} f_0(t - Ti - t_0).$$

При таком переносчике по типу изменяемого параметра различают:

- амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ), изменяется амплитуда импульса  $A$ ,
- широтно-импульсную модуляцию (ШИМ), изменяется ширина импульса  $Ti$ .
- время-импульсную модуляцию (ВИМ), изменяется позиция импульса во

времени  $t_0$ .

- частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ), изменяется частоту повторения импульсов  $f_0$ .

Если переносчиком является периодическая последовательность радиоимпульсов (с гармоническим заполнением), то можно применить еще два метода модуляции:

- с ЧМ высокочастотного заполнения,
- с ФМ высокочастотного заполнения.

Если модулирующий сигнал является дискретным, то модуляцию часто называют манипуляцией.

### 7.3.1. Модемы с АМ

При АМ первичный сигнал меняет амплитуду переносчика (несущую) путем умножения первичного сигнала на сигнал несущей. Реализация модема с АМ упрощается, когда первичный сигнал однополярный. Поэтому к информационному сигналу может добавляться постоянная составляющая  $A_0$ .

$$s(t) = (A_0 + A(t)) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Спектр АМ сигнала рассмотрим на примере модуляции гармоническим сигналом с амплитудой  $A_M$  и угловой частотой  $\Omega$ . В этом случае

$$s(t) = (A_0 + A_M \cdot \cos(\Omega t)) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 (1 + m \cdot \cos(\Omega t)) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

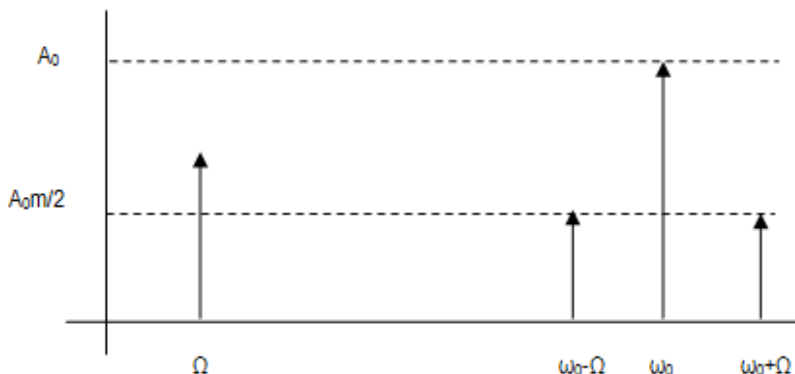
где

- $A_0$  – амплитуда несущей,
- $m = A_M/A_0$  – коэффициент (или глубина) модуляции.

Используя формулу произведения косинусов, АМ сигнал можно представить в виде:

$$s(t) = A_0 (1 + m \cdot 0.5(\cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0) + \cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0)))$$

АМ сигнал содержит 3 компоненты: нижнюю боковую, несущее колебание, верхнюю боковую. Передаваемый информационный сигнал содержится только в двух боковых компонентах (по этой причине эта АМ называется двухполосной). Так как максимально возможное  $m=1$ , то размах несущей по крайней мере в 2 раза выше боковых. С энергетической точки зрения АМ весьма невыгодна, большая часть энергии передаваемого сигнала расходуется на передачу несущей.



Для демодуляции можно использовать синхронное детектирование, при котором принятый сигнал умножается на синхронную несущую. В полученном произведении есть низкочастотная (НЧ) составляющая, совпадающая с первичным сигналом, и колебание с удвоенной частотой. НЧ составляющая может быть выделена фильтром. Демодулятор = умножитель на несущую + ФНЧ.

$$sd(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A(t) \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = A(t) \cdot \frac{(\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0) + 1)}{2}$$

Известны несколько модификаций АМ:

- Двухполосная АМ с добавленной несущей.
- Двухполосная АМ с подавленной несущей (АМ\_ПН). Имеет повышенную энергетическую эффективность из-за отсутствия несущей. В чистом виде практически применяется мало из-за трудностей демодуляции. Синхронное с несущей опорное колебание, необходимое для синхронного детектирования, конечно можно получить из сигнала от источника точного мирового времени, но это экономически невыгодно. На практике используется АМ\_ПН с остатком несущей (пилот-сигналом), из которого в приемнике формируется опорное колебание.
- Однополосная АМ (ОБП – одна боковая полоса). В спектре АМ информация дублируется в верхней и нижней боковой. При ОБП одна из них удаляется. ОБП имеет преимущества по энергетической эффективности и занимаемой полосе частот. Синхронное с несущей опорное колебание, необходимое для синхронного детектирования, обычно формируется из остатка несущей.

### 1.1.1.1. Использование пакета Signal Processing

Для АМ в пакете определены функции:

- модуляции -  $y = \text{modulate}(x, fc, fs, 'method', opt)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{demod}(y, fc, fs, 'method', opt)$ .

Параметры функций:

- $x$  – модулирующий сигнал,
- $y$  – модулированный сигнал,
- $z$  – демодулированный сигнал,
- $fc$  – частота несущей,
- $fs$  – частота дискретизации,
- 'method' – метод модуляции ('amdsb-tc' – двухполосная АМ, 'amdsb-sc' – АМ с подавленной несущей, 'amssb' – АМ с ОБП),
- opt – опционный параметр.

С использованием функции `modulate` из пакета `Signal Processing` получены графики сигналов при разных видах АМ.

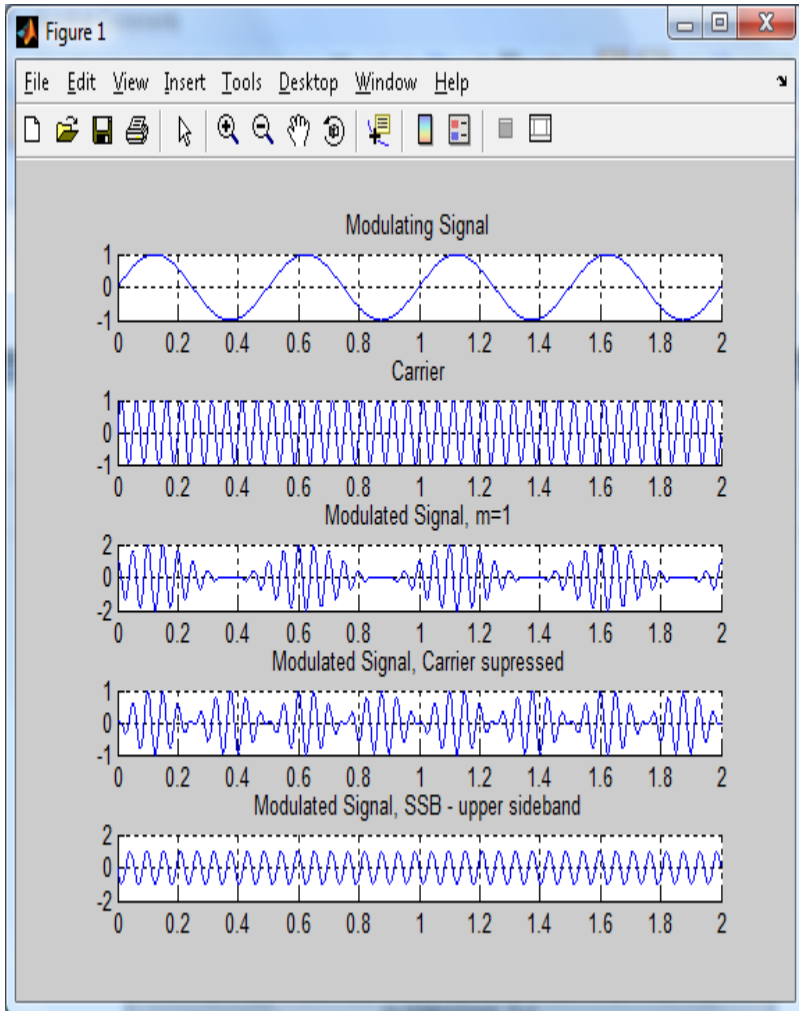
```
fs=1000; % Частота дискретизации
t=0:1/fs:2; % Время
F=2; % Частота сигнала
fc=20; % Частота несущей
a=sin(2*pi*F*t); % Сигнал
s=sin(2*pi*fc*t); % Несущая
opt1=-1;
opt2=1;
opt3=0;
s1=modulate(a,fc,fs,'amdsb-tc',opt1); % Двухполосная АМ
s2=modulate(a,fc,fs,'amdsb-sc',opt2); % АМ с подавленной несущей
s3=modulate(a,fc,fs,'amssb'); % ОБП
subplot(5,1,1);
title('Modulating Signal');
hold on;
plot(t,a);
grid on;
subplot(5,1,2);
title('Carrier');
hold on;
plot(t,s);
grid on;
subplot(5,1,3);
```



```
title('Modulated Signal, m=1');  
hold on;  
plot(t,s1);  
grid on;  
subplot(5,1,4);  
title('Modulated Signal, Carrier suppressed');  
hold on;  
plot(t,s2);  
grid on;  
subplot(5,1,5);  
title('Modulated Signal, SSB - upper sideband');  
hold on;  
plot(t,s3);  
grid on;
```

В порядке сверху вниз представлены:

- Модулирующий сигнал.
- Переносчик (несущее колебание).
- АМ с добавленной несущей при  $m=1$ , огибающая равна половине несущей. При этом форма огибающей модулированного сигнала совпадает с первичным сигналом. Это позволяет для демодуляции использовать простую операцию взятия модуля (выпрямление) с последующим выделением НЧ составляющей фильтром.
- АМ-ПН. При этом форма огибающей модулированного сигнала не совпадает с первичным сигналом. Это не позволяет осуществлять демодуляцию, как в предыдущем случае.
- ОБП с выделением верхней боковой полосы.



### 1.1.1.2. Использование пакета Communications

Для АМ в пакете определены функции:

- модуляции -  $y = \text{ammod}(x, F_c, F_s, \text{ini\_phase}, \text{carramp})$ ,
- демодуляции -  $z = \text{amdmod}(y, F_c, F_s, \text{ini\_phase}, \text{carramp}, \text{num}, \text{den})$ .

В функциях используются параметры:

- $x$  –первичный сигнал,

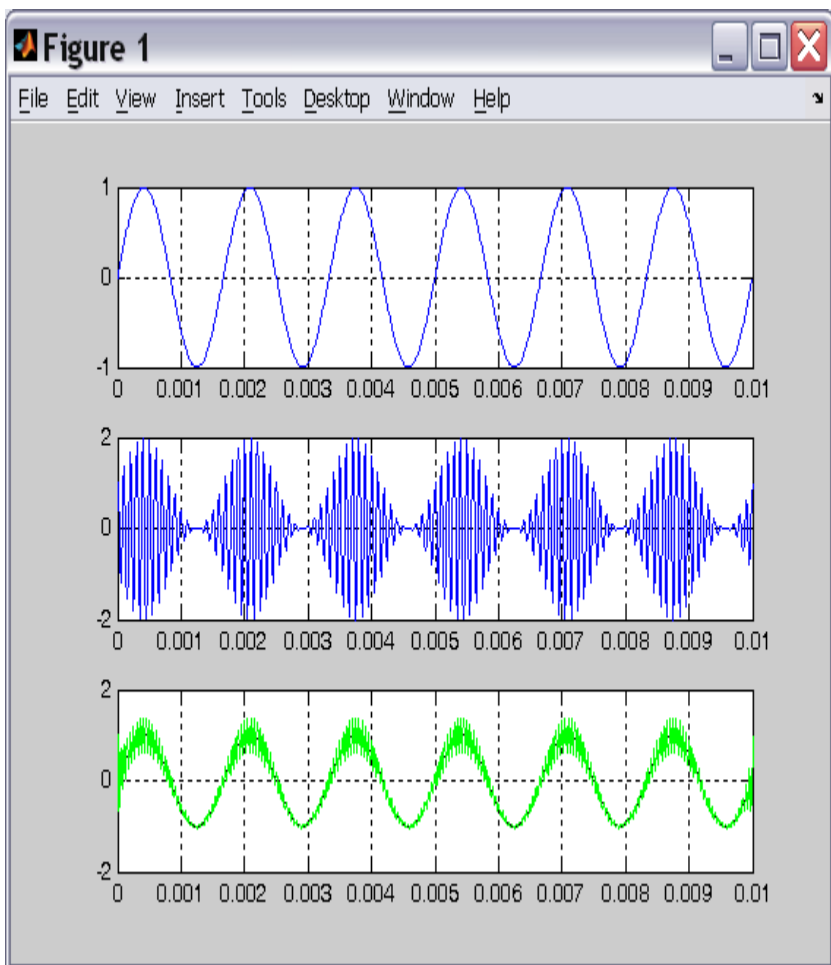
- $y$  – выход модулятора,
- $z$  – выход демодулятора,
- $F_c$  – частота несущей,
- $F_s$  – частота дискретизации,
- $\text{carramp}$  – амплитуда несущей,
- $\text{ini\_phase}$  – начальная фаза в радианах,
- $\text{num}$  – коэффициенты числителя передаточной функции ФНЧ демодулятора,
- $\text{den}$  – коэффициенты знаменателя передаточной функции ФНЧ демодулятора.

В примере первичный сигнал синусоида.

```

Fc = 10000; % Частота несущей
Fs = 80000; % Частота дискретизации
t = [0:1/Fs:0.01]'; % Моменты дискретизации
x = sin(2*pi*600*t); % Первичный сигнал
[num,den] = butter(10,3.8*Fc/Fs); % ФНЧ демодулятора
y = ammod(x,Fc,Fs,0,1); % Модуляция
z = amdemod(y,Fc,Fs,0,1,num,den); % Демодуляция
subplot(3,1,1);
plot(t,x); % Первичный сигнал
grid on;
subplot(3,1,2);
plot(t,y); % Модулированный сигнал
grid on;
subplot(3,1,3);
plot(t,x,'k-',t,z,'g-'); % Первичный и демодулированный сигналы
grid on;

```



В демодулированном сигнале виден остаток несущей, причина – слабый ФНЧ в демодуляторе.

Для ОБП в пакете определены функции:

- модуляции -  $y = \text{ssbmod}(x, f_c, f_s, \text{ini\_phase}, \text{'upper'})$ ,
- демодуляции -  $z = \text{ssbdemod}(y, F_c, F_s, \text{ini\_phase}, \text{num}, \text{den})$ .

В функциях используются параметры:

- $x$  – первичный сигнал,

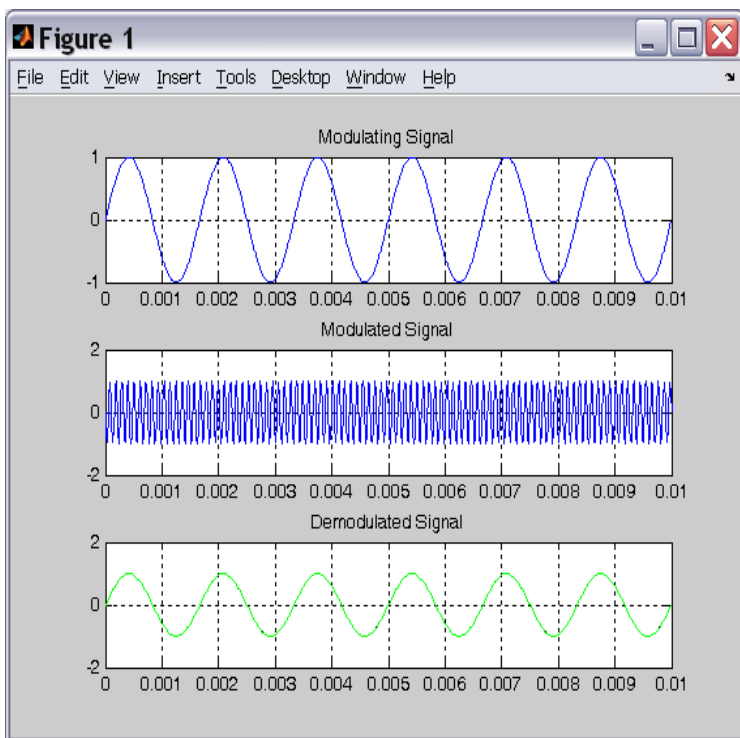
- $y$  – выход модулятора,
- $z$  – выход демодулятора,
- $F_c$  – частота несущей,
- $F_s$  – частота дискретизации,
- $ini\_phase$  – начальная фаза в радианах,
- $num$  – коэффициенты числителя передаточной функции ФНЧ демодулятора,
- $den$  – коэффициенты знаменателя передаточной функции ФНЧ демодулятора.
- 'low' или 'upper' – верхняя или нижняя боковая полоса для ОБП.

В примере первичный сигнал - синусоида. Используется верхняя БП.

```

Fc = 10000;           % Частота несущей
Fs = 80000;          % Частота дискретизации
t = [0:1/Fs:0.01]';   % Моменты дискретизации
x = sin(2*pi*600*t);   % Первичный сигнал
y = ssbmod(x,Fc,Fs); % Модуляция.
z = ssbdemod(y,Fc,Fs); % Демодуляция
subplot(3,1,1);
plot(t,x);             % Первичный сигнал
grid on;
subplot(3,1,2);
plot(t,y);             % Модулированный сигнал
grid on;
subplot(3,1,3);
plot(t,x,'k-',t,z,'g-'); % Первичный и демодулированный сигналы
grid on;

```



### 7.3.2. Модемы с угловой модуляцией

При УМ изменяется полная фаза несущей (это аргумент косинуса в выражении для модулированного сигнала). Это можно сделать, изменяя либо частоту, либо начальную фазу. При изменении частоты меняется фаза и наоборот.

Параметры УМ:

Параметр	ФМ	ЧМ
Начальная фаза	$\varphi(t) = k \cdot sm(t)$	$\varphi(t) = k \int sm(t)dt + \varphi_0$
Полная фаза	$\Psi = \omega_0 t + k \cdot sm(t)$	$\Psi = \omega_0 t + k \int sm(t)dt + \phi_0$
Мгновенная частота	$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot \frac{d}{dt}(sm(t))$	$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot sm(t)$

Сущность УМ легче всего понять на примере модуляции гармоническим сигналом. Пусть начальная фаза меняется по гармоническому закону  $\varphi(t) = \beta \cdot \sin(\Omega t)$ , где  $\beta$  – индекс угловой модуляции. Тогда модулированный сигнал  $s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \beta \cdot \sin(\Omega t))$ , а его мгновенная частота  $\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t)$ . Мгновенная частота меняется относительно среднего значения на величину  $\omega_d = \beta \Omega$  (это девиация частоты). После преобразований можно получить выражение

$$s(t) = A \cdot \sum J_k(\beta) * \cos((\omega_0 + k\Omega)t)$$

### 1.1.1.3. Использование пакета Signal Processing

Для УМ в пакете определены функции:

- модуляции -  $y = \text{modulate}(x, fc, fs, 'method', opt)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{demod}(y, fc, fs, 'method', opt)$ .

Параметры функций:

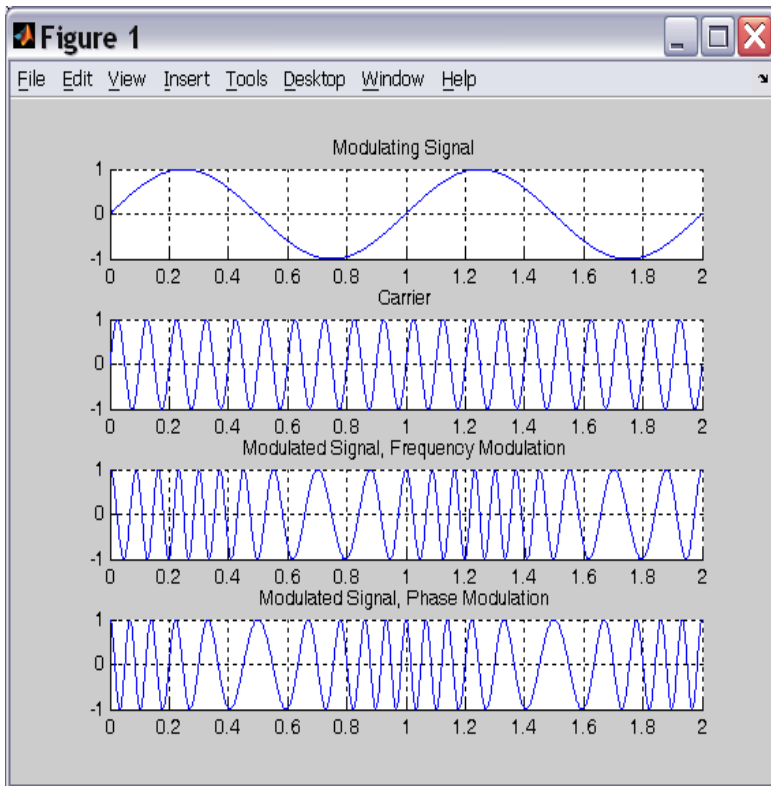
- $x$  – модулирующий сигнал,
- $y$  – модулированный сигнал,
- $z$  – демодулированный сигнал,
- $fc$  – частота несущей,
- $fs$  – частота дискретизации,
- 'method' – метод модуляции ('fm' – ЧМ, 'pm' – ФМ),
- opt – опционный параметр.

В примере моделируются разные УМ модуляторы. Использована функция modulate из пакета Signal Processing.

```
t=0:1/1000:2;           % Время
F=1;                   % Частота сигнала
fc=10;                 % Частота несущей
fs=1000;               % Частота дискретизации
a=sin(2*pi*F*t);      % Сигнал
s=sin(2*pi*fc*t);     % Несущая
opt1=0.03;
opt2=5;
s1=modulate(a,fc,fs,'fm',opt1); % ЧМ
s2=modulate(a,fc,fs,'pm',opt2); % ФМ
subplot(4,1,1);
```

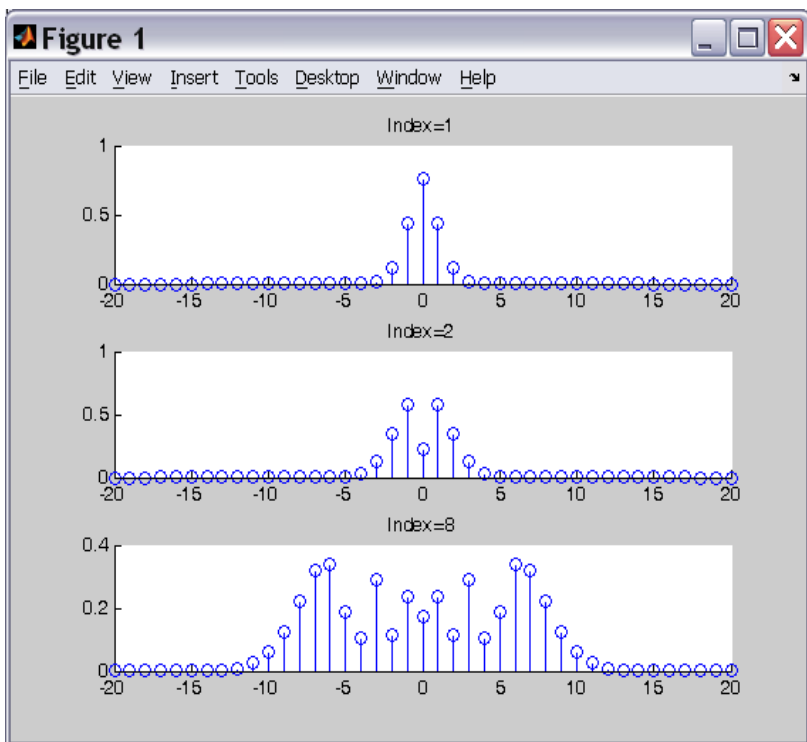
```
title('Modulating Signal');
hold on;
plot(t,a);
grid on;
subplot(4,1,2);
title('Carrier');
hold on;
plot(t,s);
grid on;
subplot(4,1,3);
title('Modulated Signal, Frequency Modulation');
hold on;
plot(t,s1);
grid on;
subplot(4,1,4);
title('Modulated Signal, Phase Modulation');
hold on;
plot(t,s2);
grid on;
```





При ЧМ и ФМ модулированный сигнал изменяется почти одинаково.

Спектр сигнала с УМ содержит бесконечное число компонент с частотами, отстоящими от несущей частоты на  $\pm k\Omega$ , имеющих амплитуды, пропорциональные  $J_k(\beta)$  – функции Бесселя первого рода порядка  $k$ . Спектр зависит от индекса модуляции  $\beta$ . Для примера показаны спектры при  $\beta = 1, 2$  и  $8$ .



Достоинство УМ – энергетические показатели и помехоустойчивость лучше, чем при АМ. Недостаток – широкий спектр частот.

При ЧМ модулирующий сигнал меняет частоту несущей. Девияция  $\omega_d$  постоянна, а индекс ЧМ  $\beta = \omega_d / \Omega$ . При ФМ модулирующий сигнал меняет фазу несущей. Индекс ФМ  $\beta$  – величина постоянная, а девияция  $\omega_d = \beta \Omega$ .

#### 1.1.1.4. Использование пакета Communications

Для ЧМ в пакете определены функции:

- модуляции -  $y = \text{fmmod}(x, F_c, F_s, \text{freqdev})$
- демодуляции -  $z = \text{fmdemod}(x, F_c, F_s, \text{freqdev})$

В функциях используются параметры:

- $x$  – первичный сигнал,
- $y$  – выход модулятора,
- $z$  – выход демодулятора,
- $F_c$  – частота несущей,

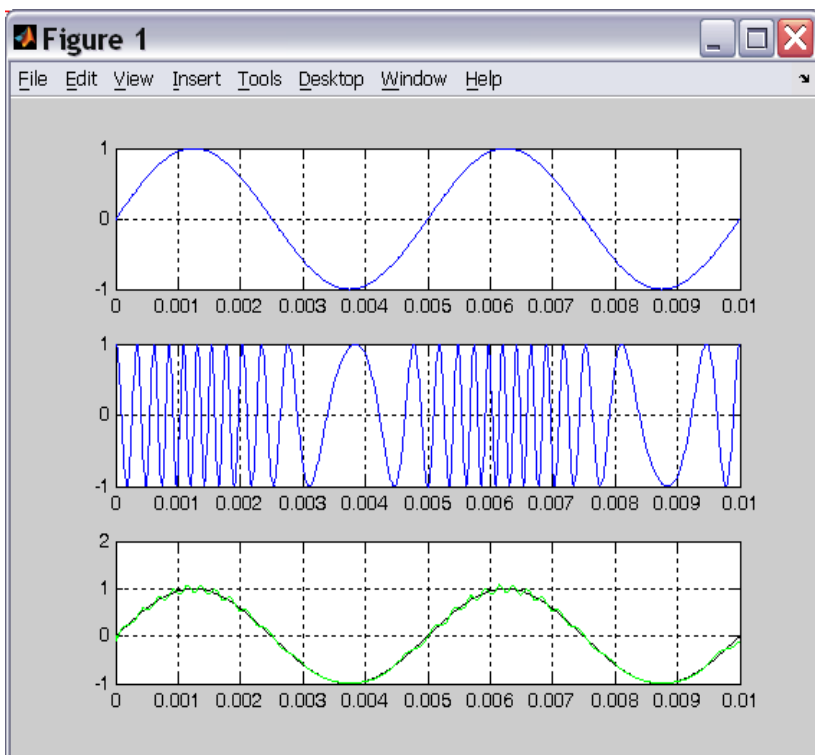
- $F_s$  – частота дискретизации,
- $\text{freqdev}$  – девиация частоты.

В примере моделируется ЧМ модемы. Используются функции `fmod` и `fmdemod`.

```

Fc = 2500; % Частота несущей
Fs = 80000; % Частота дискретизации
t = [0:1/Fs:0.01]; % Моменты дискретизации
x = sin(2*pi*200*t); % Первичный сигнал
freqdev=2000; % Девиация частоты
y = fmod(x,Fc,Fs,freqdev); % Модуляция.
z = fmdemod(y,Fc,Fs,freqdev); % Демодуляция
subplot(3,1,1);
plot(t,x); % Первичный сигнал
grid on;
subplot(3,1,2);
plot(t,y); % Модулированный сигнал
grid on;
subplot(3,1,3);
plot(t,x,'k-',t,z,'g-'); % Первичный и демодулированный сигналы
grid on;

```



В демодулированном сигнале виден остаток несущей, причина – слабый ФНЧ в демодуляторе.

Для ФМ в пакете определены функции:

- модуляции -  $y = \text{pmmod}(x, F_c, F_s, \text{phasedev})$ ,
- демодуляции -  $z = \text{pmdemod}(x, F_c, F_s, \text{phasedev})$ .

В функциях используются параметры:

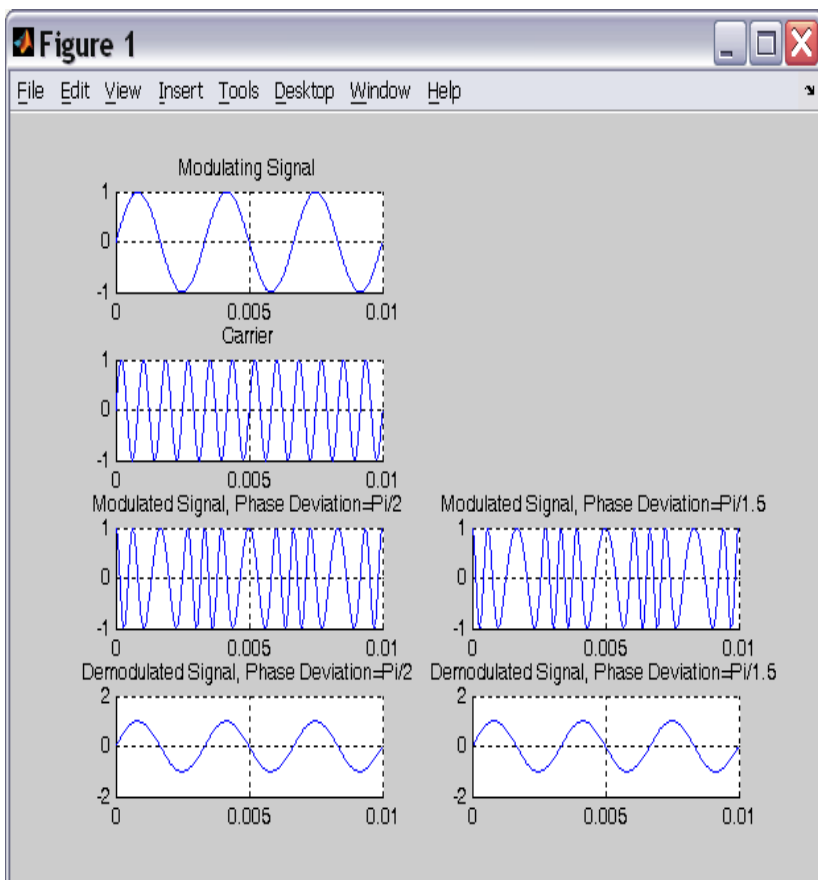
- $x$  – первичный сигнал,
- $y$  – выход модулятора,
- $z$  – выход демодулятора,
- $F_c$  – частота несущей,
- $F_s$  – частота дискретизации,
- $\text{phasedev}$  – девиация фазы.

В примере моделируются ФМ модемы с разными индексами модуляции. Используются функции `pmmod` и `pmdemod` из пакета `Communications`.

```

Fc = 1200; % Частота несущей
Fs = 80000; % Частота дискретизации
F = 300; % Частота сигнала
t = [0:1/Fs:0.01]; % Время
x = sin(2*π*F*t); % Сигнал
c = sin(2*π*Fc*t); % Несущая
B1=2; B2=1.5; % Индекс модуляции
psdev1=π/B1; psdev2=π/B2; % Девияция фазы
y1 = pmmod(x,Fc,Fs,psdev1); % ФМ
y2 = pmmod(x,Fc,Fs,psdev2);
z1 = pmdemod(y1,Fc,Fs,psdev1); % ФМ демодуляция
z2 = pmdemod(y2,Fc,Fs,psdev2);
subplot(4,2,1);
title("Modulating Signal");
hold on;
plot(t,x);
grid on;
subplot(4,2,3);
title("Carrier");
hold on;
plot(t,c);
grid on;
subplot(4,2,5);
title(["Modulated Signal, Phase Deviation=π/",num2str(B1)]);
hold on;
plot(t,y1);
grid on;
subplot(4,2,6);
title(["Modulated Signal, Phase Deviation=π/",num2str(B2)]);
hold on;
plot(t,y2);
grid on;
subplot(4,2,7);
title(["Demodulated Signal, Phase Deviation=π/",num2str(B1)]);
hold on;
plot(t,z1);
grid on;
subplot(4,2,8);
title(["Demodulated Signal, Phase Deviation=π/",num2str(B2)]);
hold on;
plot(t,z2);
grid on;

```



### 7.3.3. Модем с КАМ

При КАМ используется свойство ортогональности квадратурных компонент сигнала. Сигнал  $A(t)$  модулирует косинусную компоненту несущей, а сигнал  $B(t)$  косинусную.

$$s(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + B(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Для демодуляции сигнала КАМ используют два синхронных детектора: в одном опорный сигнал синхронизирован с косинусной компонентой, а в другом с синусной.

Квадратурные компоненты несущей и синхронные с ними опорные сигналы приемника должны быть сформированы очень точно. В противном случае будет взаимное влияние каналов.

Для КАМ в пакете Signal Processing определены функции:

- модуляции -  $y = \text{modulate}(x, fc, fs, 'method', opt)$ ,
- демодуляции -  $[z1\ z2] = \text{demod}(a1, fc, fs, 'method')$ ;

Параметры функций:

- $x$  – модулирующий сигнал,
- $y$  – модулированный сигнал,
- $[z1\ z2]$  – демодулированный сигнал (две квадратурных компоненты),
- $fc$  – частота несущей,
- $fs$  – частота дискретизации,
- 'method' – метод модуляции ('qam' – КАМ),
- $opt$  – второй модулирующий сигнал.

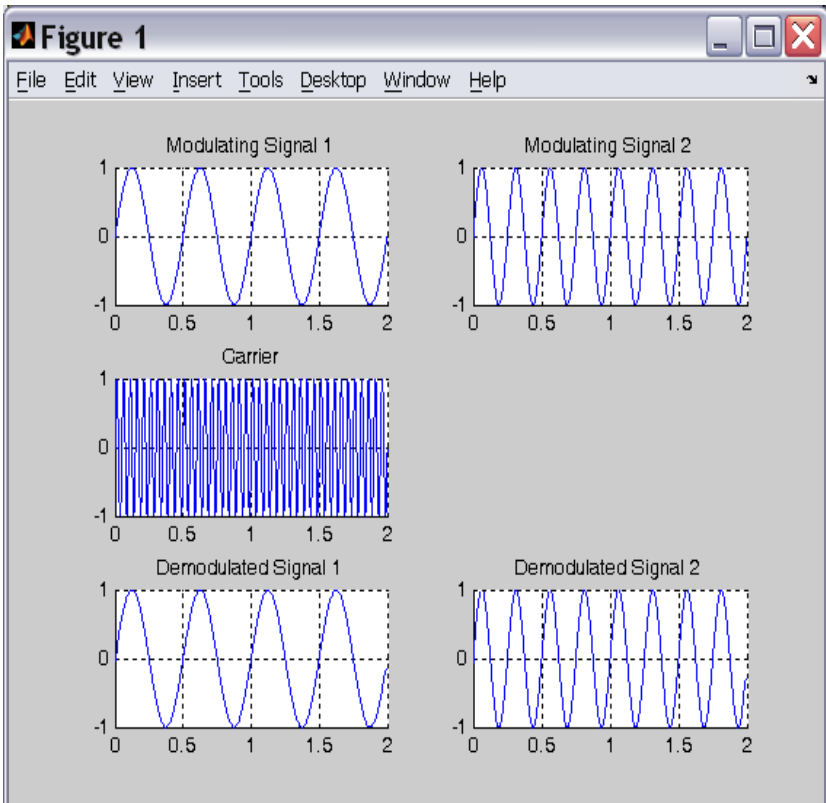
В примере моделируются КАМ модулятор для стереосистемы. Использована функция `modulate` из пакета Signal Processing.

```
fs=1000;           % Частота дискретизации
t=0:1/fs:2;       % Время
F1=2; F2=4;      % Частоты сигналов
fc=20;           % Частота несущей
a1=sin(2*pi*F1*t); % Сигнал 1
a2=sin(2*pi*F2*t); % Сигнал 2
c=sin(2*pi*fc*t); % Несущая
s=modulate(a1,fc,fs,'qam',a2); % КАМ
[z1 z2]=demod(s,fc,fs,'qam'); % КАМ демодуляция
subplot(3,2,1);
title('Modulating Signal 1');
hold on;
plot(t,a1);
grid on;
subplot(3,2,2);
title('Modulating Signal 2');
hold on;
plot(t,a2);
grid on;
subplot(3,2,3);
title('Carrier');
```

```

hold on;
plot(t,c);
grid on;
subplot(3,2,5);
title("Demodulated Signal 1");
hold on;
plot(t,z1);
grid on;
ylim([-1 1]);
subplot(3,2,6);
title("Demodulated Signal 2");
hold on;
plot(t,z2);
grid on;
ylim([-1 1]);

```





### 7.3.4. Модемы с импульсным переносчиком

Известны модемы, в которых используется импульсный переносчик – последовательность прямоугольных импульсов. Для них могут применяться:

- модуляция импульсов по ширине (ШИМ), англоязычное обозначение PWM (pulse width modulation),
- модуляция импульсов по времени (позиции), англоязычное обозначение PPM (pulse position modulation).

Для модемов с импульсным переносчиком в пакете Signal Processing определены функции:

- модуляции -  $y = \text{modulate}(x, fc, fs, 'method', opt)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{demod}(y, fc, fs, 'method', opt)$ .

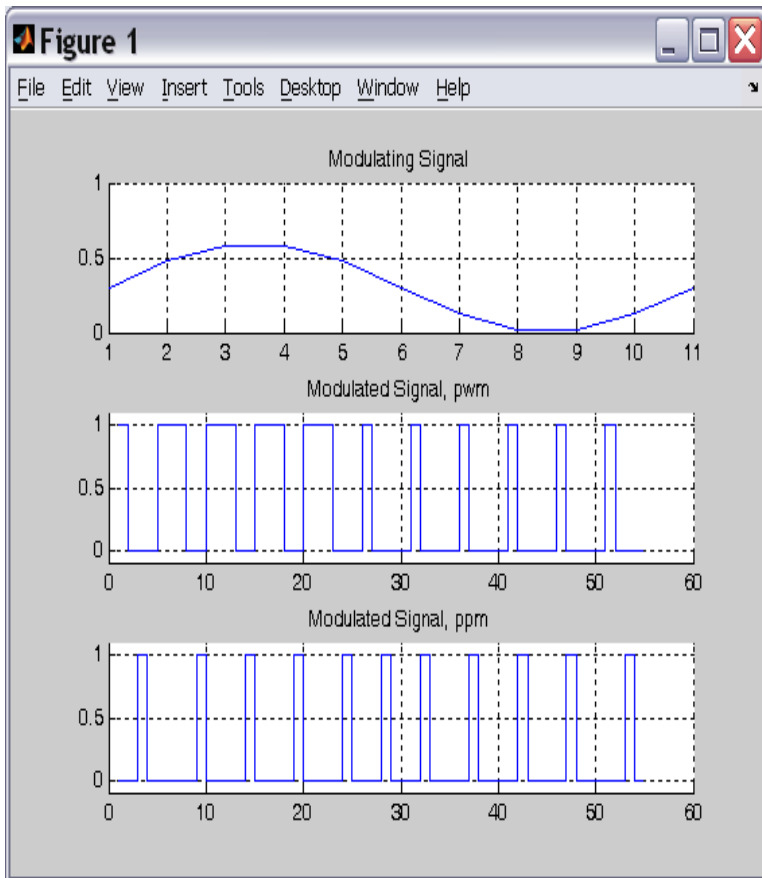
Параметры функций:

- $x$  – модулирующий сигнал,
- $y$  – модулированный сигнал,
- $z$  – демодулированный сигнал,
- $fc$  – частота несущей,
- $fs$  – частота дискретизации,
- 'method' – метод модуляции ('pwm' – ШИМ, 'ppm' – ВИМ),
- opt – опционный параметр.

В примере моделируются модемы с импульсным переносчиком: ШИМ и ВИМ. Используются функции modulate и demodulate из пакета Signal Processing.

```
fs=10; % Частота дискретизации
fc=2; % Частота импульсов
F=1; % Частота сигнала
t=0:1/fs:1; % Время
s=0.3+0.3*sin(2*pi*F*t); % Сигнал
sp(1:11)=1; % Импульсы
opt2=0.2;
s1=modulate(s,fc,fs,'pwm','centered'); % ШИМ
s2=modulate(s,fc,fs,'ppm',opt2); % ВИМ
subplot(3,1,1);
title('Modulating Signal');
hold on;
plot(s);
grid on;
subplot(3,1,2);
```

```
title('Modulated Signal, pwm');  
hold on;  
ylim([-0.1 1.1]);  
stairs(s1);  
grid on;  
subplot(3,1,3);  
title('Modulated Signal, ppm');  
hold on;  
ylim([-0.1 1.1]);  
stairs(s2);  
grid on;
```



### 7.3.5. Сравнение разных видов модуляции

Разные виды модуляции отличаются друг от друга:

- энергетическими затратами,
- шириной спектра,
- помехоустойчивостью.

С энергетической точки зрения наиболее эффективна АМ с ОБП, а самая неэффективная двухполосная АМ.

Наименьший спектр занимает АМ с ОБП, самый широкий спектр у УМ, особенно при больших индексах.

Исследования показывают, что при АМ ( $m = 1$ ) помехоустойчивость можно увеличить лишь за счет увеличения мощности сигнала, а при ФМ и ЧМ также путем увеличения индексов модуляции, что достигается за счет расширения спектра сигнала.

Все широкополосные системы модуляции обеспечивают высокую помехоустойчивость при условии, что отношение сигнал/помеха на входе больше некоторого порогового значения. Если это условие нарушается, то широкополосные системы теряют свои преимущества (резко снижается помехоустойчивость), это явление называют явлением порога помехоустойчивости. Методы понижения порогового уровня при приеме сигналов угловой модуляции (например, ЧМ) основаны главным образом на использовании узкополосного приемника с перестраиваемой средней частотой с тем, чтобы следить за мгновенной частотой сигнала в пределах ширины спектра.

### 7.4. Способы модуляции для передачи данных

Для представления данных используются дискретные сигналы, содержащие элементарные символы (ЭС) со значениями 1 и 0. Терминология возникла в телеграфии, где применялись аппараты с нажатием ключа. Поэтому ЭС=1 связывают с нажатием, а ЭС=0 с отжатием ключа. Чаще всего СД передаются в цифровой форме с использованием особых типов модуляции (или манипуляции):

- АМ – амплитудная манипуляция (ASK - amplitude shift keying),
- ФМ – фазовая манипуляция (PSK - phase shift keying),
- ЧМ – частотная манипуляция (FSK - frequency shift keying),
- АИМ – амплитудно-импульсная манипуляция (PAM – pulse amplitude modulation).

По исторической причине в англоязычных названиях типов манипуляции часто фигурирует shift keying (нажатие ключа).

При модуляции параметр несущего колебания меняется дискретно в зависимости от значения СД. Для повышения скорости передачи данных применяются многоуровневые методы манипуляции. В них на каждом такте модулируемый параметр переносчика принимает значение из набора, соответствующего комбинации из нескольких битов. При использовании многоуровневой манипуляции исходная двоичная последовательность предварительно разбивается на комбинации бит, которые определяют модулируемый параметр переносчика в данный момент. Если комбинация содержит  $N$  бит, то требуется  $2^N$  значений в наборе. Пример методов манипуляции:

- 2-уровневые, длина комбинации 1 бит (коды 0, 1), в наборе 2 значения,
- 4-уровневые, длина комбинации 2 бит (коды 00, 01, 11, 11), в наборе 4 значения,
- 8-уровневые, длина комбинации 3 бит (коды 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111), в наборе 8 значений.

### **7.4.1. Цифровые модемы в MATLAB**

В пакете Communications поддерживаются цифровые модемы:

- с импульсной амплитудной манипуляцией ИАМ,
- с частотной манипуляцией ЧМ,
- с частотной манипуляцией минимальным сдвигом ММС,
- с фазовой манипуляцией ФМ,
- с фазовой манипуляцией со смещенными квадратурами СКФМ,
- с относительной фазовой манипуляцией ОФМ,
- с квадратурной амплитудной манипуляцией КАМ,
- с обобщенной квадратурной амплитудной манипуляцией ОКАМ,

Для каждого модема предусмотрены функции модуляции и демодуляции. Во всех функциях можно не задавать некоторые параметры, тогда они примут значения по умолчанию.

В цифровых модемах прямой просмотр сигналов дает немного информации. Более информативны диаграммы, получаемые с помощью специальных инструментов:

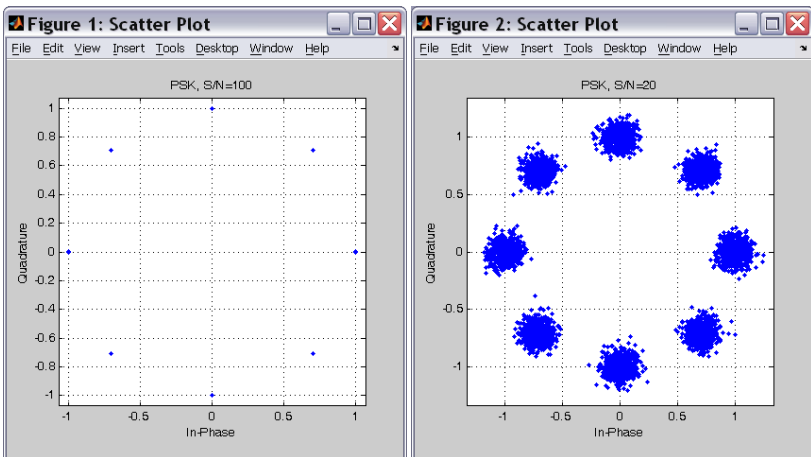
- карта рассеяния,
- глазковая диаграмма.

Выбор инструмента индивидуален, это зависит от используемого способа манипуляции.

### 1.1.1.5. Карта рассеяния

Это график, в котором комплексная огибающая сигнала отображается путем последовательного отображения ее значений на амплитудно-фазовой плоскости с наложением текущего значения на предыдущие. В MATLAB определена функция карты рассеяния `scatterplot(x)`.

Карта рассеяния может использоваться для просмотра созвездия, используемого в модеме (рисунок, слева). На карте каждому компоненту созвездия соответствует точка на амплитудно-фазовой плоскости. По карте можно оценить качество канала связи. При наличии помех карта рассеяния «размазывается» (рисунок, справа).



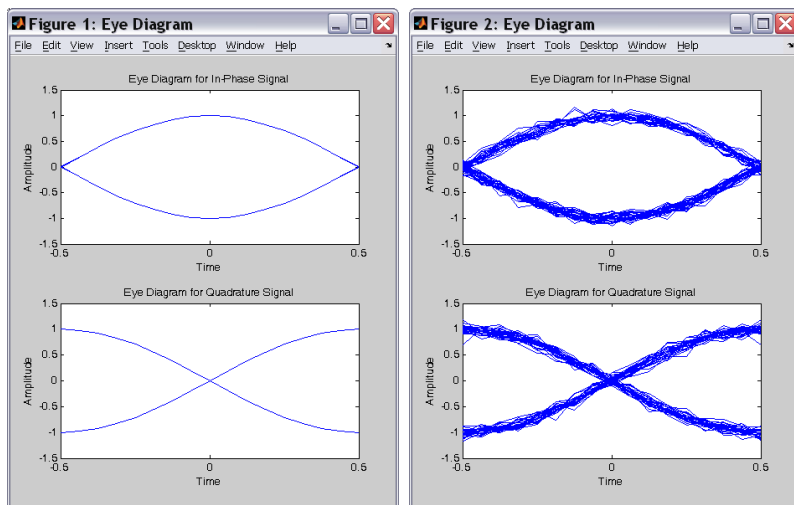
### 1.1.1.6. Глазковая диаграмма

Это график, в котором комплексная огибающая сигнала отображается путем последовательного рисования ее временных фрагментов с наложением на предыдущие. В MATLAB определена функция глазковой диаграммы `eyediagram(x,n)`. Ее аргументы:

- $x$  – сигнал,
- $n$  – число отсчетов фрагмента сигнала, целое большее 1.

Функция отображает глазковую диаграмму отдельно для синфазной (сверху) и квадратурной (снизу) компонент комплексной огибающей модулированного сигнала. Диаграмма наиболее наглядна, когда в ней фрагмент равен длительности одного информационного символа. Символы могут иметь антиподные значения (1 и -1), при этом на глазковой диаграмме для фрагментов рисуются линии с противоположными знаками. Часто в системах связи для сокращения

спектра сигнала используется сглаживание формы сигнала символа, когда из прямоугольного формируется плавный сигнал (при косинусном сглаживании формируется сигнал в форме приподнятого косинуса, и эта линия рисуется на глазковой диаграмме). При отсутствии помех диаграмма напоминает открытый глаз, что определяет ее название (рисунок, слева). При наличии помех в канале связи диаграмма искажается (рисунок, справа). Чем интенсивнее помеха, тем сильнее глаз «закрывается».



### 1.1.1.7. Модем с АМ

АМ (ASK –amplitude shift keying) - это частный случай АМ для аналоговых сигналов. В настоящее время находит ограниченное применение.

При АМ первичный сигнал управляет только амплитудой передаваемого сигнала. Для АМ<sub>n</sub> определены функции:

- модуляции -  $y = \text{rammod}(x, M)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{ramdemod}(y, M)$ .

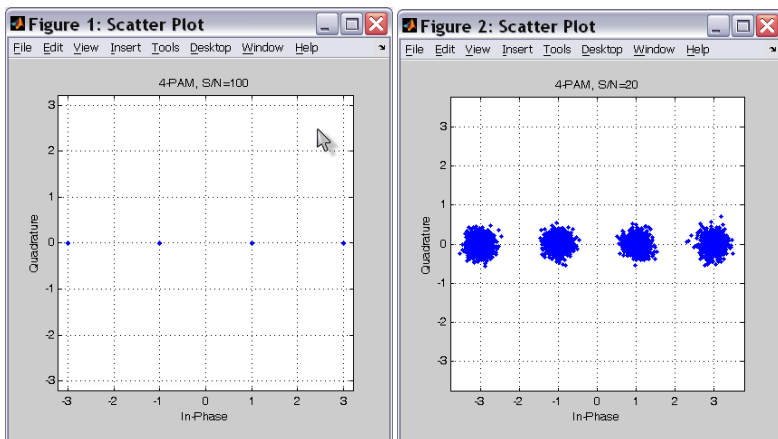
В функциях используются параметры:

- $y$  - комплексная огибающая,
- $x$  – первичный сигнал, целые числа в интервале от 0 до  $M-1$ ,
- $z$  – демодулированный сигнал,
- $M$  – размер алфавита, целое число.

В примере первичный сигнал – случайное сообщение с размером алфавита 4. Ему соответствует созвездие из 4-ех компонент, размещенных на веществен-

ной оси с разномом 2. Отображаются две карты рассеяния: слева с большим отношением С/Ш=100 дБ, когда шум практически не влияет, справа с малым С/Ш=20 дБ.

```
M = 4; % Размер алфавита
x = randint(5000,1,M); % Случайное цифровое сообщение
y = pammod(x,M); % 4-PAM модуляция
ynoisy1 = awgn(y,100,'measured'); % Добавление шумов, С/Ш=100 дБ
ynoisy2 = awgn(y,20,'measured'); % Добавление шумов, С/Ш=20 дБ
scatterplot(ynoisy1); % Графики рассеяния
grid on;
title('4-PAM, S/N=100');
scatterplot(ynoisy2);
grid on;
title('4-PAM, S/N=20');
```



### 1.1.1.8. Модем с ФМ

ФМ в чистом виде не нашла практического применения из-за так называемой "обратной работы", когда при ошибке в приеме одного бита последующие за ним будут приняты инверсно. Практически применяется относительная ФМ (ОФМ). Для нее информация представляется не абсолютным значением фазы, а разностью фаз несущей на двух соседних интервалах. Применяются 2-двухуровневая, а также многоуровневые (4, 8 и т.д.). При повышении уровня снижается помехоустойчивость.

При ФМн первичный сигнал управляет только фазой передаваемого сигнала. Для ФМн определены основные функции:

- модуляции -  $y = \text{pskmod}(x, M)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{pskdemod}(y, M)$ .

Определены две дополнительные функции, предназначенные только для дифференциальной манипуляции:

- модуляции  $y = \text{dpskmod}(x, M)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{dqpskdemod}(y, M)$ .

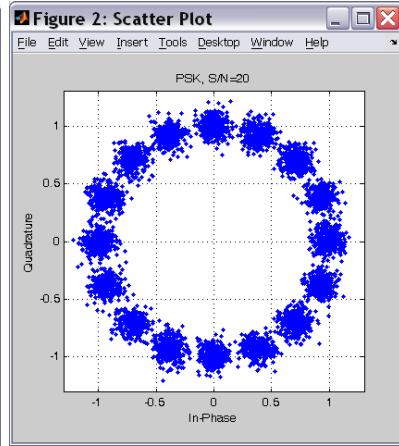
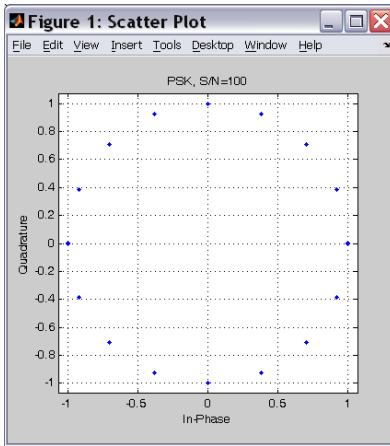
В функциях используются параметры:

- $y$  - комплексная огибающая,
- $x$  – первичный сигнал, целые числа в интервале от 0 до  $M-1$ ,
- $z$  – демодулированный сигнал,
- $M$  – размер алфавита (число фаз), 2 в целой степени,

В примере первичный сигнал – случайное сообщение с размером алфавита 16. Ему соответствует созвездие из 8-и компонент, размещенных на окружности радиусом 1 с одинаковым разносом. Отображаются две карты рассеяния: слева с большим отношением  $C/\text{Ш}=100$  дБ, когда шум практически не влияет, справа с малым  $C/\text{Ш}=20$  дБ.

```
M = 16; % Размер алфавита
x = randint(5000,1,M); % Случайное сообщение
y = pskmod(x,M); % 8-ФМн
SNR1=100;SNR2=20;
ynoisy1 = awgn(y,SNR1,'measured'); % Добавить шумы
ynoisy2 = awgn(y,SNR2,'measured');
scatterplot(ynoisy1); % Графики рассеяния
title(['PSK, S/N=',num2str(SNR1)]);
grid on;
scatterplot(ynoisy2);
title(['PSK, S/N=',num2str(SNR2)]);
grid on;
```





### 1.1.1.9. Модем с КАМ

Квадратурная манипуляция КАМ (QASK – quadrature amplitude shift keying) используется для передачи символов данных (СД) из заданного алфавита. Каждому СД ставится в соответствие КАМ вектор в одной из двух форм:

- алгебраической

$$s(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + b \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$a, b$  - это пара амплитуд косинусной и синусной компонент,

- экспоненциальной

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

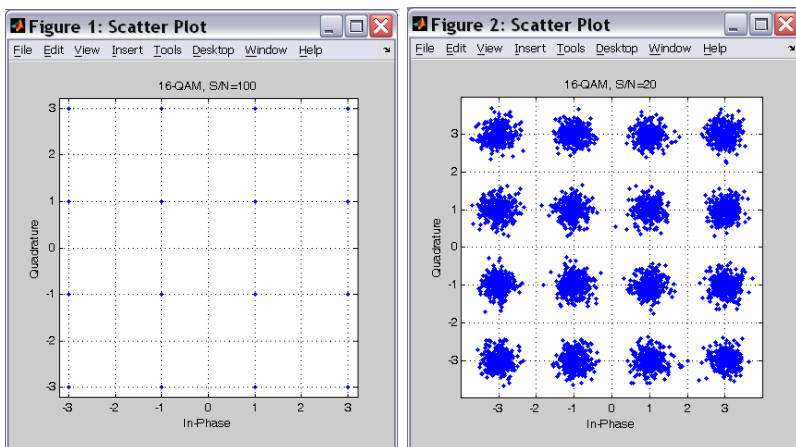
$A$  – амплитуда,  $\varphi_0$  - начальная фаза.

Набор СД называют созвездием (или сигнальной конструкцией). В современных модемах применяют созвездия с числом точек от 4 до нескольких тысяч.

КАМ находит очень широкое применение. При КАМн первичный сигнал управляет и амплитудой, и фазой передаваемого сигнала. Для КАМн Определены функции:

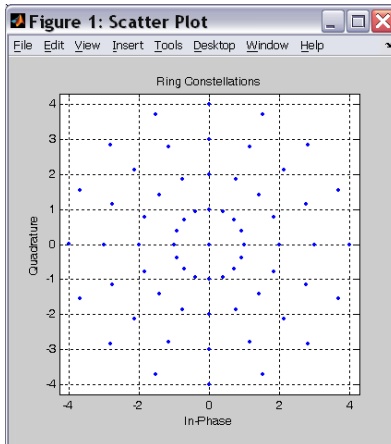
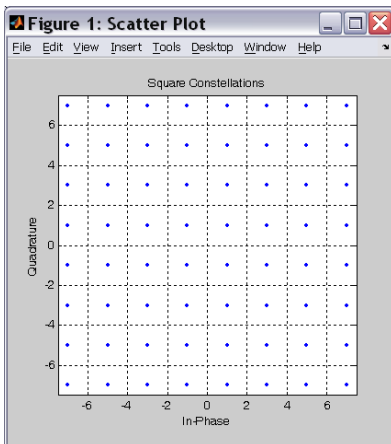
- модуляции -  $y = \text{qammod}(x, M)$ ,
- демодуляции -  $z = \text{qamdemod}(y, M)$ .
- В функциях используются параметры:
- $y$  - комплексная огибающая,
- $x$  – первичный сигнал, целые числа в интервале от 0 до  $M-1$ ,
- $z$  – демодулированный сигнал,
- $M$  – размер алфавита (число компонент в созвездии), 2 в целой степени.

В примере первичный сигнал – случайное сообщение с размером алфавита 16. Ему соответствует созвездие из 16-и компонент, размещенных на прямоугольной сетке с одинаковым разносом. Отображаются две карты рассеяния: слева с большим отношением С/Ш=100 дБ, когда шум практически не влияет, справа с малым С/Ш=20 дБ. Можно заметить, что при одинаковых условиях КАМн по сравнению с ФМн выгоднее, так как на карте рассеяния созвездия легче распознаются.



Компоненты созвездия могут размещаться:

- На прямоугольной сетке при этом расстояние между компонентами одинаково. Это означает одинаковую помехоустойчивость для всех передаваемых символов.
- На секторной сетке, при этом расстояние между компонентами не одинаково. Это означает, что помехоустойчивость для передаваемых символов разная. Вместе с тем одновременно квадратурные компоненты не имеют максимальных значений, что снижает требования к мощности передатчика модема.
- Произвольно. При этом можно сочетать преимущества двух первых конструирования созвездий. Именно так создаются созвездия в современных модемах.



### 1.1.1.10. Модем с обобщенной КАМ

В этом модеме используются созвездия произвольного вида. Для него определены функции:

- модуляции -  $y = \text{genqammod}(y, \text{const})$ ,
- демодуляции -  $z = \text{genqamdmod}(y, \text{const})$ .

В функциях используются параметры:

- $y$  - комплексная огибающая,
- $x$  - первичный сигнал, целые числа в интервале от 0 до  $\text{length}(\text{const})-1$ ,
- $z$  - демодулированный сигнал,
- $\text{const}$  - комплексный вектор, задающий созвездие.

### 1.1.1.11. Модем с ЧМ

ЧМ - это частный случай ЧМ для аналоговых сигналов.

В простой ЧМ каждый символ обрабатывается независимо, поэтому в ЧМ сигнале возникают скачки, приводящие к расширению спектра сигнала.

Для устранения скачков применяется ЧМ с непрерывной фазой (ЧМНФ). В этом методе параметры выбираются таким образом, чтобы сигналы соседних посылок на границе имели бы одинаковую фазу.

Еще более плавный сигнал получается при использовании ЧМ с минимальным сдвигом (ММС). В этой системе начальные фазы посылок делаются одинаковыми и равными фазам в точках максимума и минимума сигнала, когда скорость изменения нулевая. Для этого разнос между частотами выбирается та-

ким, чтобы за время длительности одного элемента фаза несущей менялась ровно на  $\pi/2$ .

При ЧМн первичный сигнал управляет частотой передаваемого сигнала. Девияция частоты задается произвольно. По умолчанию используется алгоритм ЧМн с непрерывной фазой. Для ЧМн определены функции:

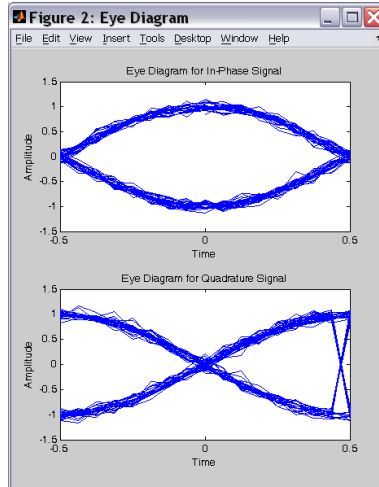
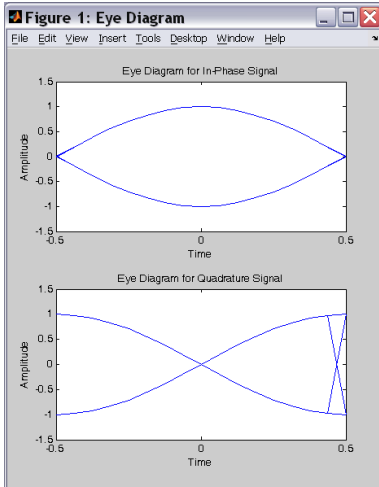
- модуляции -  $y = \text{fskmod}(x, M, \text{freq\_sep}, \text{nsamp})$ ,
- демодуляции -  $z = \text{fskdemod}(y, M, \text{freq\_sep}, \text{nsamp})$ .

В функциях используются параметры:

- $y$  - комплексная огибающая,
- $x$  - первичный сигнал, целые числа в интервале от 0 до  $M-1$ ,
- $z$  - демодулированный сигнал,
- $M$  - размер алфавита (число частот), 2 в целой степени,
- $\text{freqsep}$  - девияция частоты,
- $\text{nsamp}$  - число отсчетов в  $y$ .

В примере первичный сигнал – случайное сообщение с размером алфавита 2. Отображаются две глазковые диаграммы: слева с большим отношением  $C/\text{Ш}=100$  дБ, когда шум практически не влияет, справа с малым  $C/\text{Ш}=20$  дБ.

```
NSamp=8; % Число отсчетов
M = 2; % Число символов
Fs = 32; % Частота дискретизации
freqsep = 2;
x = randint(99,1,M); % Случайный сигнал
y = fskmod(x,M,freqsep,NSamp,Fs,'discont'); % ЧМн.
SNR1=100;SNR2=20;
ynoisy1 = awgn(y,SNR1,'measured'); % Добавить шумы
ynoisy2 = awgn(y,SNR2,'measured');
eyediagram(ynoisy1,NSamp*2); % Глазковые диаграммы
eyediagram(ynoisy2,NSamp*2);
```



### 1.1.1.12. Модем с ММС

ММС - это модификация ЧМНФ. При ММС девиация частоты подбирается таким образом, чтобы за время одного символа набег фазы составил точно  $\pi/2$ . При этом границы символов попадают точно на фазы, кратные  $\pi/2$ , модулированный сигнал получается наиболее плавным. Для ММС определены функции:

- модуляции -  $y = \text{mskmod}(x, \text{nsamp})$ ,
- демодуляции -  $z = \text{mskdemod}(y, \text{nsamp})$ .

В функциях используются параметры:

- $y$  - комплексная огибающая,
- $x$  - первичный сигнал, 0 или 1,
- $z$  - демодулированный сигнал,
- $\text{nsamp}$  - число отсчетов на один символ в  $y$ , положительное целое

В примере первичный сигнал - случайное сообщение со значениями 0 и 1. Отображаются две глазковые диаграммы: слева с большим отношением С/Ш=100 дБ, когда шум практически не влияет, справа с малым С/Ш=20 дБ. Число отсчетов  $\text{NSamp}=8$  выбрано достаточно большим, чтобы получить плавную глазковую диаграмму. Число точек в глазковой диаграмме  $\text{NSamp}=8$  выбрано вдвое больше  $\text{NSamp}$ , чтобы глазковая диаграмма отображала только один символ.

```

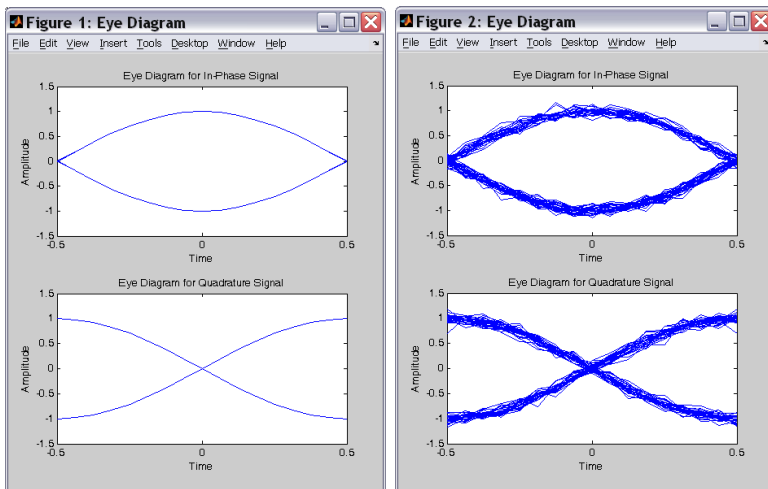
NSamp=8;           % Число отсчетов
x = randint(99,1); % Случайное сообщение
y = mskmod(x,NSamp); % ММС

```

```

SNR1=100;SNR2=20;
ynoisy1 = awgn(y,SNR1,'measured'); % Добавить шумы
ynoisy2 = awgn(y,SNR2,'measured');
eyediagram(ynoisy1,NSamp*2); % Глазковые диаграммы
eyediagram(ynoisy2, NSamp=8);

```



## 7.4.2. Треллис-модуляция

Применение многопозиционной КАМ в чистом виде сопряжено с проблемой недостаточной помехоустойчивости. Поэтому во всех высокоскоростных протоколах КАМ используется совместно с решетчатым кодированием – специальным видом сверточного кодирования. В результате появился новый способ модуляции, называемый треллис-модуляцией (TCM – Trellis Coded Modulation).

В ней число сигнальных точек увеличивается вдвое за счет добавления к каждой информационной кодовой комбинации одного избыточного бита, образованного путем сверточного кодирования. Расширенные таким образом данные подвергаются все той же КАМ. В процессе демодуляции принятый сигнал декодируется по алгоритму Витерби, который за счет введенной избыточности и знания предыстории процесса приема позволяет по критерию максимального правдоподобия выбрать из сигнального пространства наиболее достоверную точку.

## 8. Цифровая фильтрация

### 8.1. Передаточные функции ЦФ

Поведение ЦФ описывается уравнением состояния, которое может анализироваться в частотной или временной областях.

В частотной области уравнение состояния ЦФ имеет вид  $Y(s)=X(s) \cdot H(s)$ , где

- $X(s)$  – входной сигнал,
- $Y(s)$  – выходной сигнал,
- $H(s)$  - передаточная функция.

Выражение для  $H(s)$  имеет вид

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s - sz_0) \cdot (s - sz_1) \cdot \dots \cdot (s - sz_n)}{(s - sp_0) \cdot (s - sp_1) \cdot \dots \cdot (s - sp_m)} \text{ , где}$$

- $s = j\omega$  – мнимая угловая частота,
- $sz_0, sz_1, \dots, sz_n$  – нули передаточной функции,
- $sp_0, sp_1, \dots, sp_m$  – полюса передаточной функции.

Во временной области уравнение состояния ЦФ имеет вид  $Y(z)=X(z) \cdot H(z)$ , где

- $X(z)$  – входной сигнал,
- $Y(z)$  – выходной сигнал,
- $H(z)$  - передаточная функция.

Выражение для  $H(z)$  имеет вид 
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B_0 + B_1 \cdot z^{-1} + \dots + B_n \cdot z^{-n}}{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_m \cdot z^{-m}} \text{ ,}$$

где

- $z = \exp(-j\omega T_d)$  – переменная, которая связывает временную область с частотной, фактически она описывает операцию задержки на 1 такт длительностью  $T_d$  (интервал дискретизации),
- числитель  $H(z)$  – полином с коэффициентами  $B_0, B_1, \dots, B_n$ ,
- знаменатель  $H(z)$  – полином с коэффициентами  $1, A_1, \dots, A_m$ .

Максимальный порядок полиномов, используемых в ЦФ, определяет порядок фильтра.

По  $H(z)$  можно составить уравнение состояния фильтра

$$Y(z) = X(z) \cdot (B_0 + B_1 \cdot z^{-1} + \dots + B_n \cdot z^{-n}) - Y(z) \cdot (A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_m \cdot z^{-m}) \text{ .}$$

Для расчета текущего выходного отсчета  $Y(z)$  нужно просуммировать текущий и предыдущие входные отсчеты, умноженные на коэффициенты числителя  $N(z)$ , и затем вычесть предыдущие выходные отсчеты, умноженные на коэффициенты знаменателя  $H(z)$ .

В зависимости от того, используются при расчете текущего выходного отсчета предыдущие выходные отсчеты или нет, различают две группы ЦФ:

- Нерекursивные ЦФ. В них обратные связи отсутствуют, в расчетах не участвуют предыдущие выходные отсчеты. Отсутствие обратных связей означает, что в ЦФ нет циркуляции данных и поэтому их импульсная характеристика конечна (она определяется порядком фильтра). Нерекursивные фильтры часто называют фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ).
- Рекурсивные ЦФ. В них есть обратные связи и в расчетах участвуют предыдущие выходные отсчеты. Наличие обратных связей означает, что в ЦФ есть циркуляция данных и поэтому их импульсная характеристика бесконечна. Рекурсивные фильтры часто называют фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). Рекурсивные ЦФ могут содержать и рекурсивную, и нерекursивную части. Из уравнения состояния фильтра следует, что числитель  $N(z)$  определяет нерекursивную часть, а знаменатель – рекурсивную.

## 8.2. Проектирование фильтров

Фильтрация чаще всего используется для выделения в сигнале гармонических компонент с определенными частотами. Поэтому при проектировании фильтров чаще используется представление в частотной области.

В зависимости от типа ЧХ различают фильтры:

- нижних частот ФНЧ (LPF – low pass frequency),
- верхних частот ФВЧ (HP – high pass),
- полосно-пропускающий ПФ (BP – band pass),
- полосно-задерживающий, или режекторный ПФ (BS – band stop),
- другие (дифференциатор, преобразователь Гильберта и др.).

В зависимости от метода реализации фильтры могут быть КИХ или БИХ типа. Для каждого при проектировании могут использоваться разные математические методы.

Проектирование фильтра осуществляется в следующем порядке:

- Расчет НЧ прототипа, под которым понимается фильтр с нормированной частотой среза (граница полос пропускания и задерживания).



- Преобразование прототипа в реальный фильтр.
- Реализация фильтра.
- Контрольный просчет полученных характеристик.

### 8.3. КИХ фильтры

Особенности КИХ фильтра

Передаточная функция не содержит рекурсивной части

$$H(z) = B_0 + B_1 \cdot z^{-1} + \dots + B_n \cdot z^{-n},$$

ЧХ имеет только нули  $H(s) = (s - sz_0) \cdot (s - sz_1) \cdot \dots \cdot (s - sz_n)$

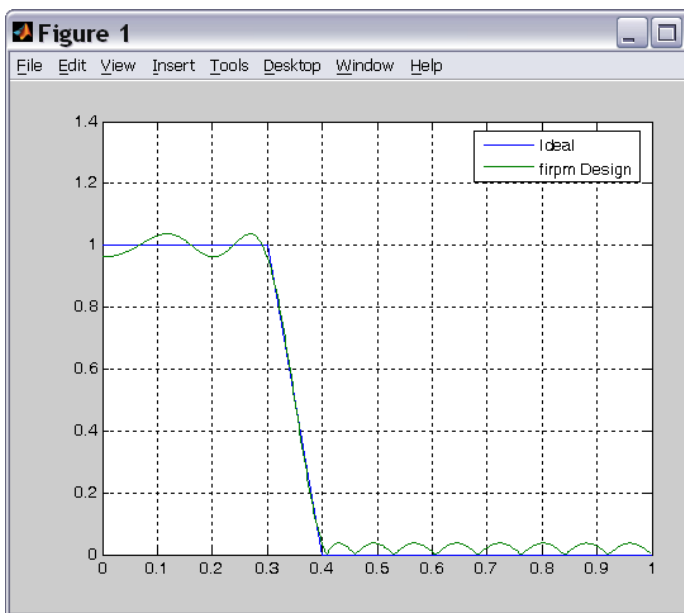
Ниже рассмотрены КИХ фильтры, синтезированные разными математическими методами. Во всех КИХ фильтрах ФЧХ линейна, поэтому КИХ фильтры предпочтительно использовать при ОС, для которых имеет значение форма (например, видеосигналы).

#### 8.3.1. КИХ с равномерными пульсациями (Equiripple)

Используется алгоритм Паркса-Макклелана (обобщение алгоритма Ремеза), обеспечивающий равномерные пульсации АЧХ относительно заданной формы. Функция  $B = \text{firpm}(N, F, A)$  возвращает вектор коэффициентов  $B$  для фильтра порядка  $N$ , требования к АЧХ которого задаются векторами частот  $F$  и значений  $A$ .

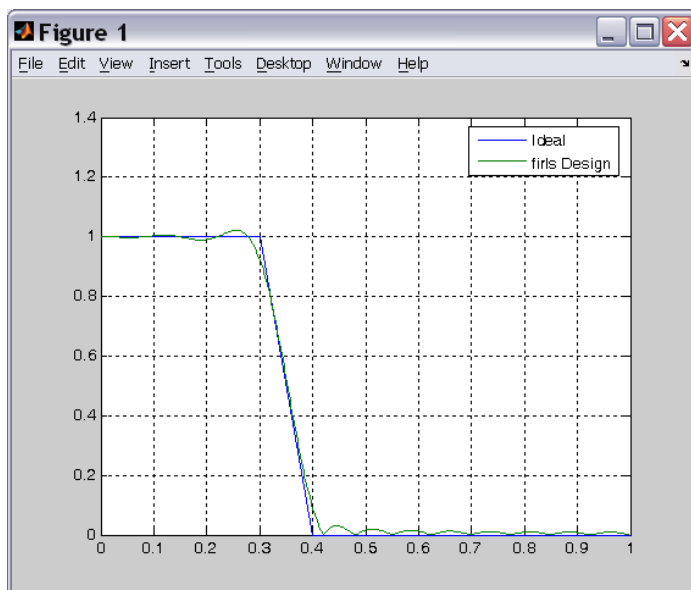
Эта программа формирует заданную и реальную АЧХ.

```
F = [0 0.3 0.4 1];
A = [1 1 0 0];
B = firpm(25, F, A);
[h, w] = freqz(B, 1, 512);
plot(f, a, w/pi, abs(h))
legend('Ideal', 'firpm Design')
grid on
```



### 8.3.2. КИХ по методу наименьших квадратов (Least-squares)

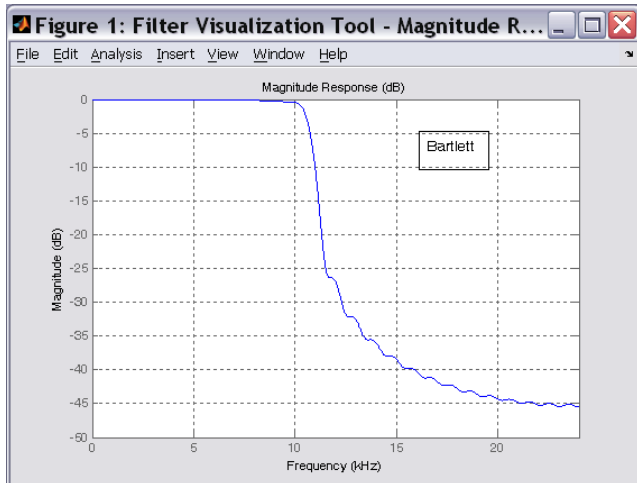
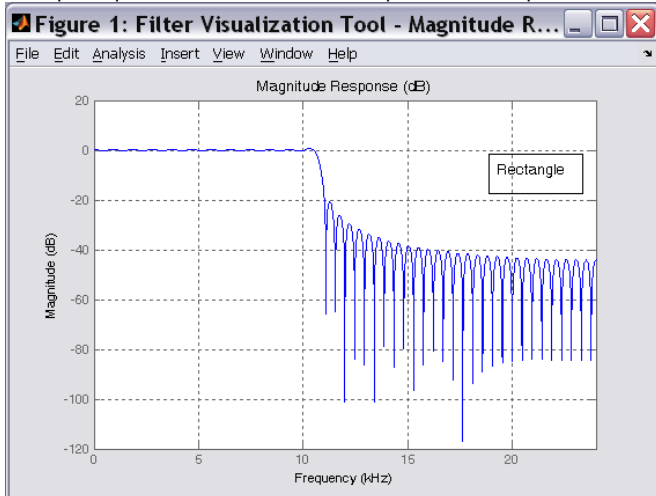
Используется алгоритм, минимизирующий среднеквадратичное отклонение отсчетов АЧХ от заданных. Функция  $B = \text{firls}(N,F,A)$  возвращает вектор коэффициентов  $B$  для фильтра порядка  $N$ , требования к АЧХ которого задаются векторами частот  $F$  и значений  $A$ . Графики ниже получены такой же программой, но с другой функцией. При том же порядке фильтра точность лучше.

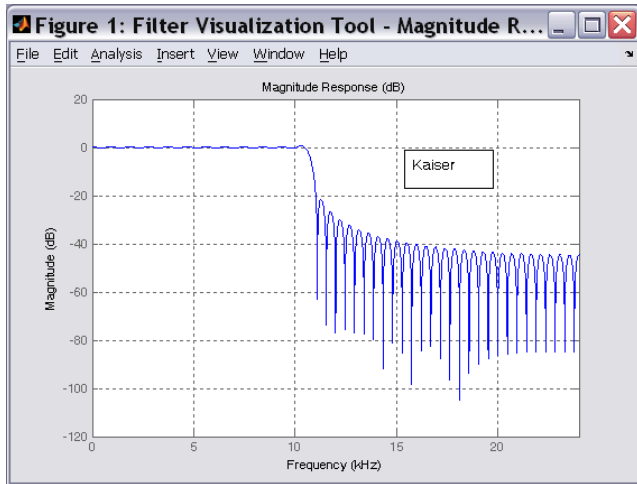
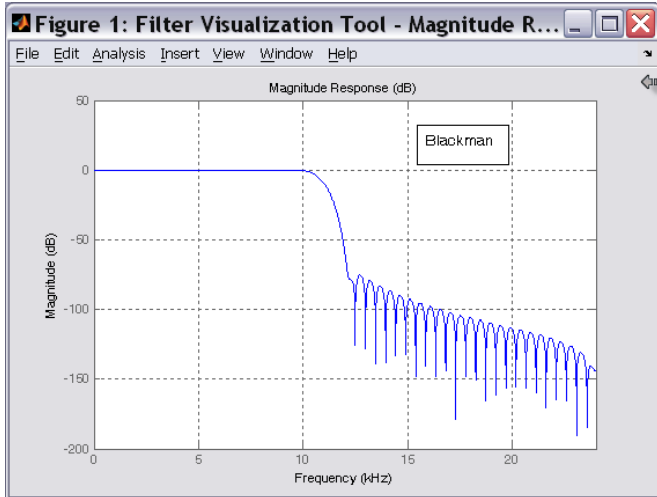


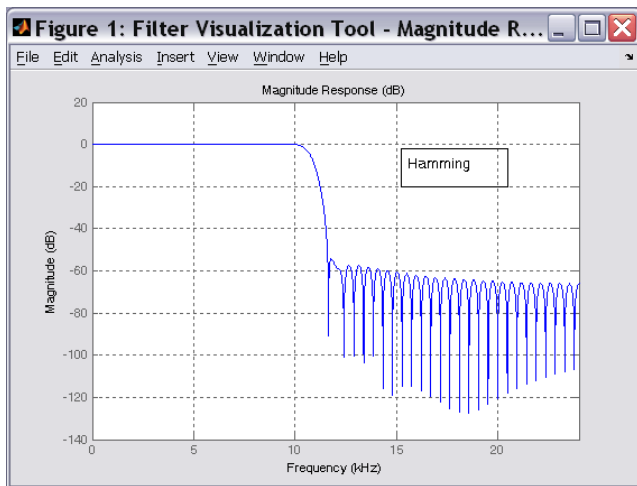
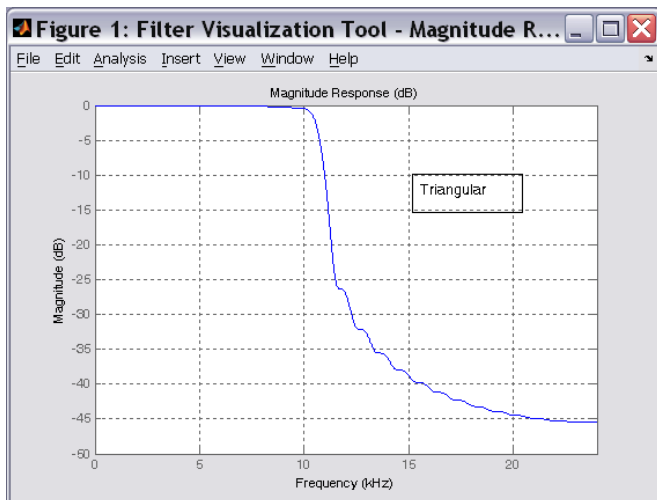
### 8.3.3. Оконный КИХ (Window)

Идеальный фильтр должен иметь прямоугольную АЧХ. К сожалению он не реализуем, так как его ИХ бесконечна. Для реального фильтра сделаны попытки приблизиться к идеальному путем ограничения длины ИХ. ИХ оконных КИХ получают из ИХ идеального фильтра умножением на ограниченную во времени функцию окна. Простейшее прямоугольное окно не используется, так как АЧХ фильтра приобретает пульсации в окрестности частоты среза (эффект Гиббса). Применяются специально подобранные оконные функции. Ниже примеры АЧХ оконных фильтров одинаковой длины  $N=100$ . Хорошую избирательность

дают фильтры с окнами Хемминга, Бартлета, Кайзера, Блекмана.







## 8.4. БИХ фильтры

Особенности БИХ фильтра

- Передаточная функция содержит рекурсивную часть,
- ЧХ может иметь нули и полюса

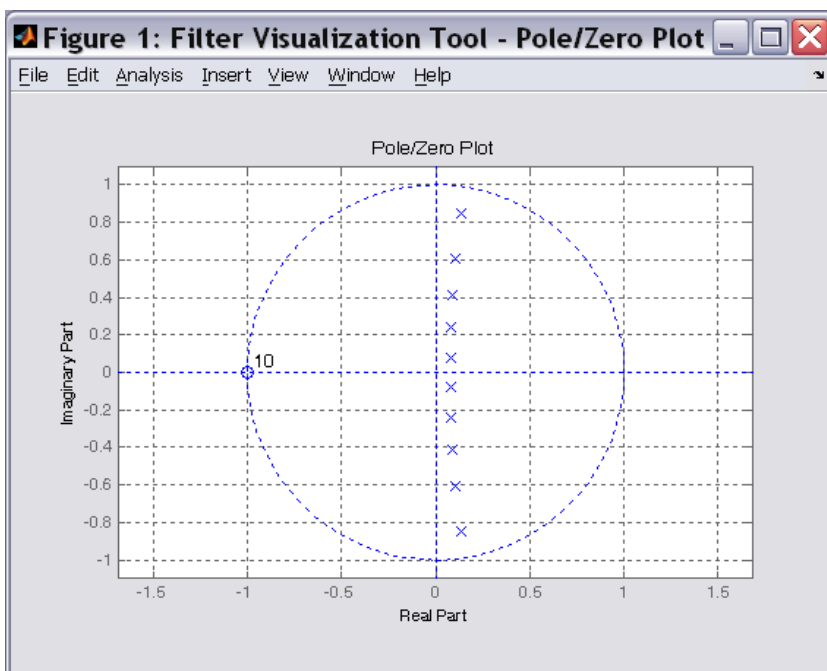
Ниже рассмотрены БИХ фильтры, синтезированные разными математическими методами. Во всех БИХ фильтрах ФЧХ нелинейна, поэтому БИХ фильтры можно использовать для сигналов, форма которых не имеет значения (напри-

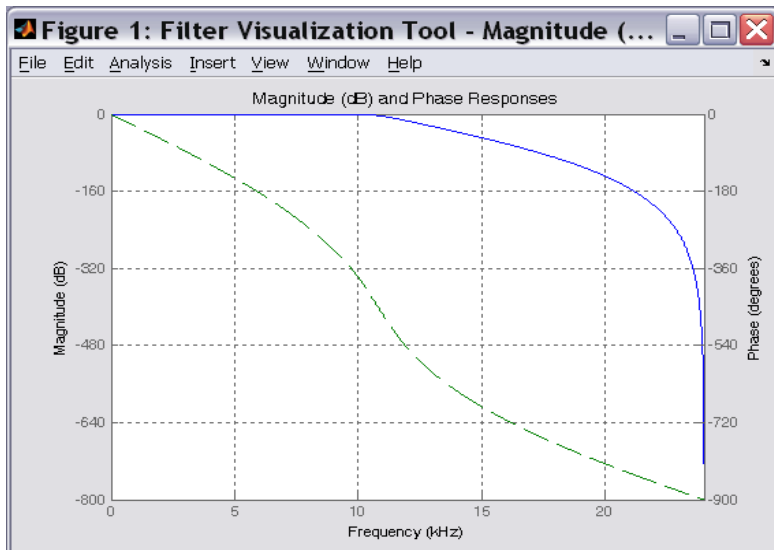
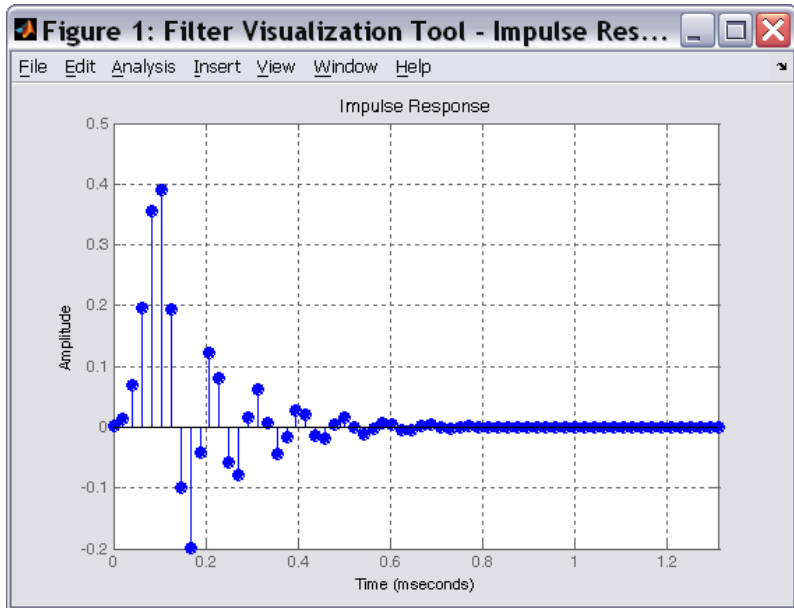
мер, звуковые сигналы, которые воспринимает ухо человека, распознающее в них частотные компоненты). Ниже рассмотрены разные БИХ фильтры порядка 10. Для каждого фильтра приведены:

- карта нулей и полюсов,
- ИХ,
- АЧХ (сплошная линия) и ФЧХ (пунктирная линия),
- ГВЗ.

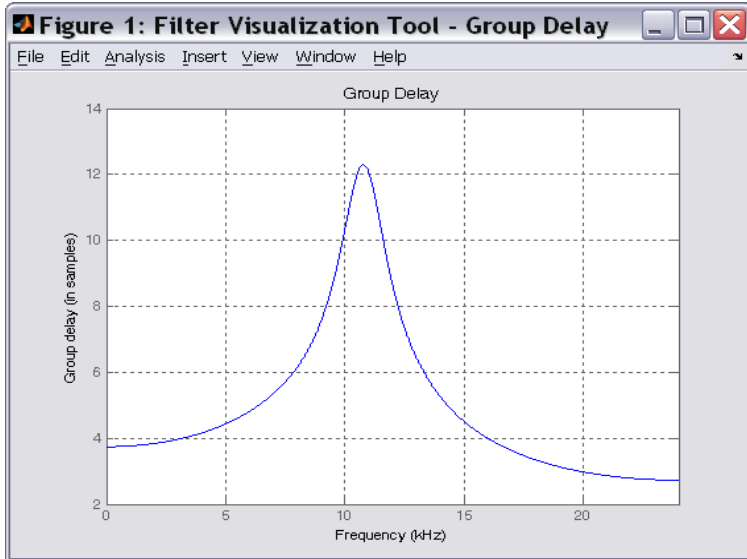
### 8.4.1. БИХ фильтр Баттерворта

Эти фильтры имеют АЧХ максимально плоскую в полосе пропускания и монотонную в полосе задерживания.



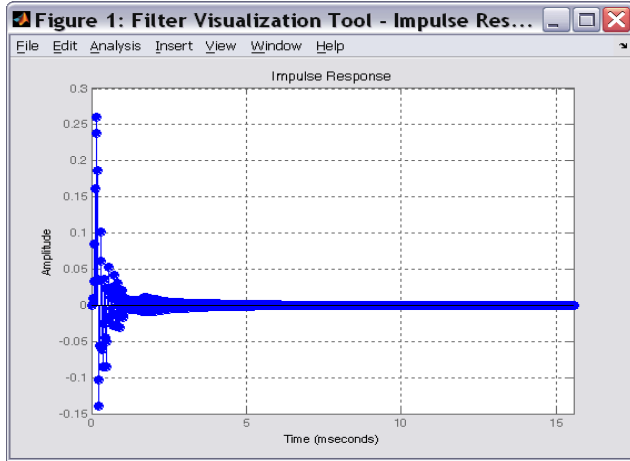
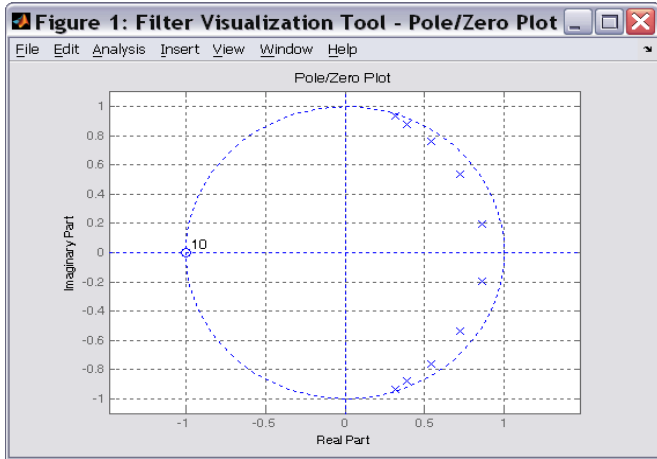


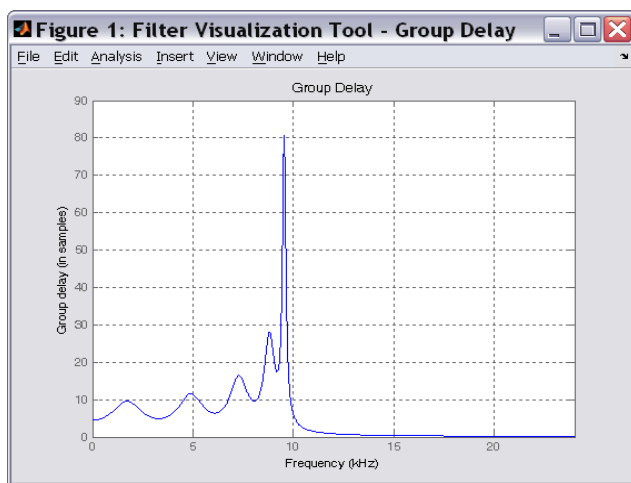
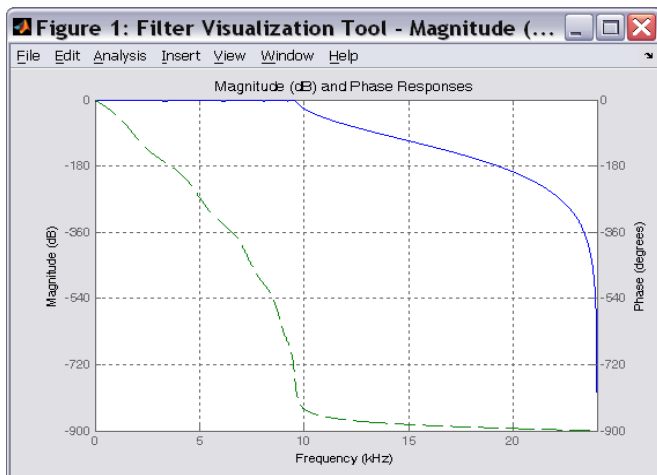




#### 8.4.2. БИХ фильтр Чебышева 1 типа

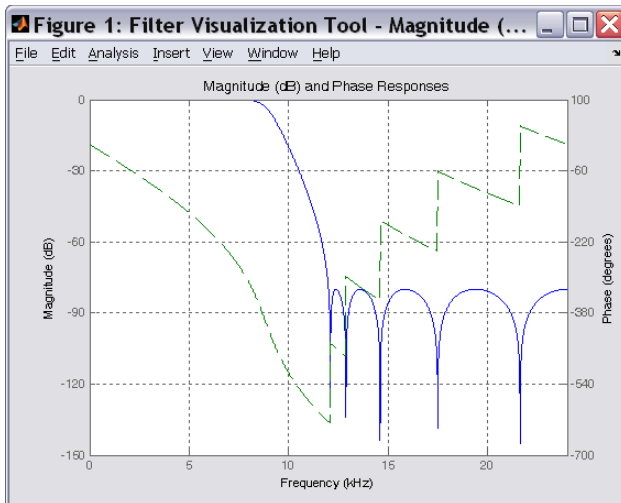
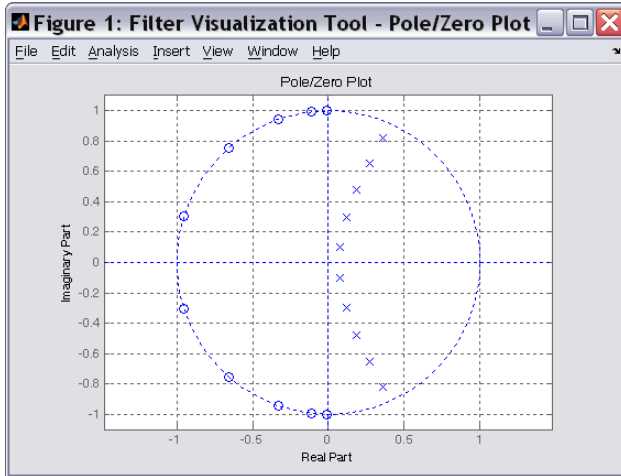
Эти фильтры имеют АЧХ с равномерными пульсациями в полосе пропускания и монотонную в полосе задерживания. В математическом описании используются полиномы Чебышева. Из-за пульсирующего характера АЧХ в полосе пропускания крутизна АЧХ в переходной полосе выше, чем у фильтра Баттерворта, и ширина переходной полосы ниже. При одинаковых требованиях к АЧХ порядок фильтра Чебышева меньше, чем у фильтра Баттеворта.

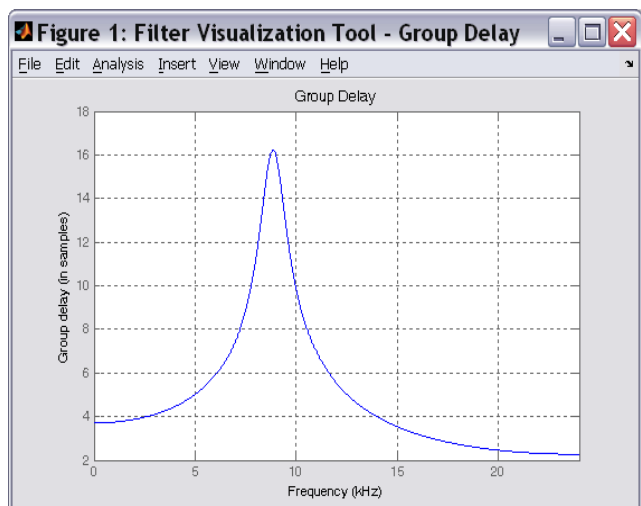
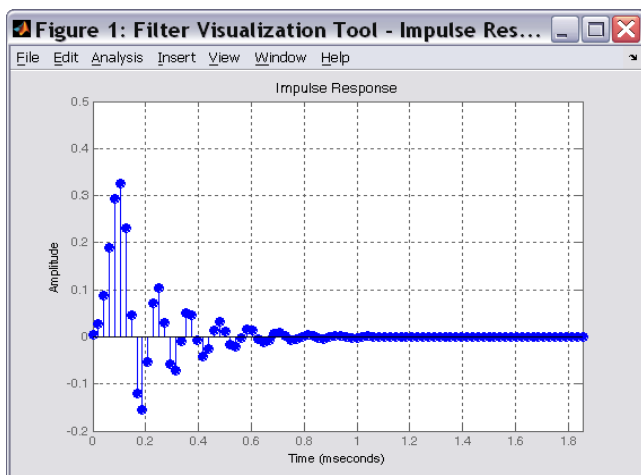




### 8.4.3. БИХ фильтр Чебышева 2 типа

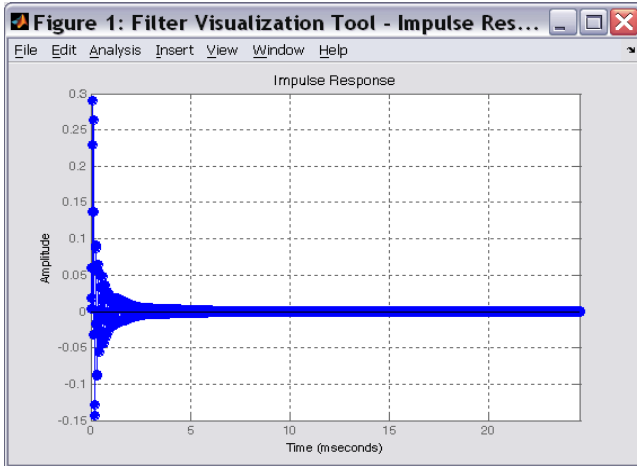
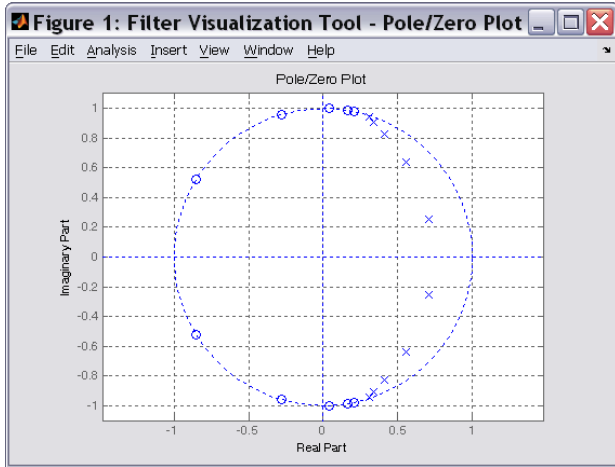
Эти фильтры имеют АЧХ монотонную в полосе пропускания и с равномерными пульсациями в полосе задерживания. Иначе их называют инверсными фильтрами Чебышева.

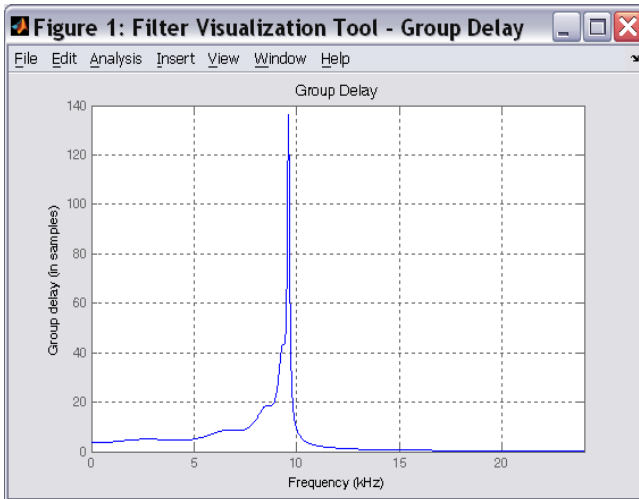
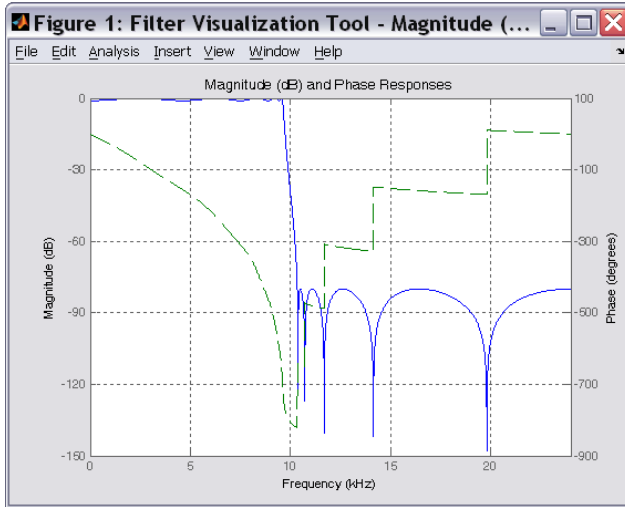




#### 8.4.4. Эллиптический БИХ фильтр (Кауэра, Золотарева)

Эти фильтры имеют АЧХ с равномерными пульсациями и в полосе пропускания, и в полосе задерживания. В их математическом описании используются эллиптические функции с двойной периодичностью.





## 8.5. Структуры ЦФ

Структура ЦФ определяет порядок вычисления выходных отсчетов. Возможны следующие структуры:

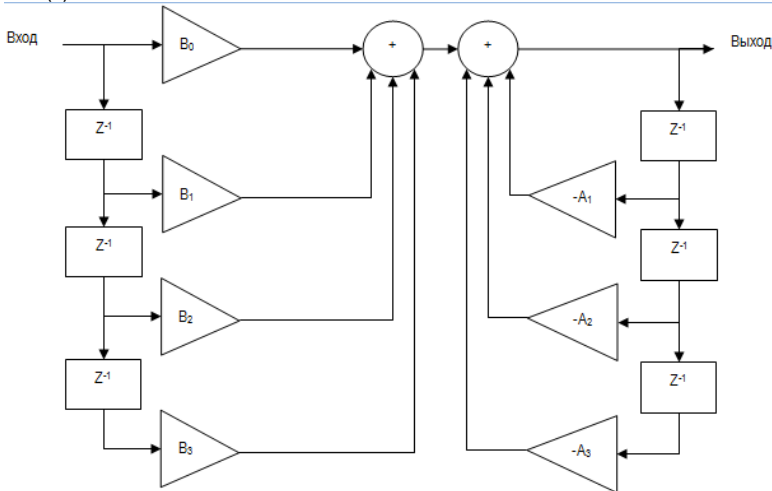
- Прямые формы, строятся прямо по уравнению фильтра.
- Каноническая форма, отличается максимальной простотой.
- Транспонированные формы, получаются из прямых форм для повышения

скорости работы фильтра.

- Последовательная форма. Форма представляет собой каскадное соединение звеньев небольшого порядка. Используется для уменьшения ошибок, связанных с накоплением погрешностей округления при вычислениях. Часто звенья имеют второй порядок (SOS), они называются также биквадратными.
- Параллельная форма. Форма представляет собой параллельное соединение звеньев небольшого порядка. Используется для уменьшения ошибок, связанных с накоплением ошибок округления при вычислениях. По шумам уступает каскадной форме.
- Решетчатая форма. В ней коэффициенты фильтра поступают на отдельный вход, что позволяет реализовать ЦФ с меняющимися параметрами.

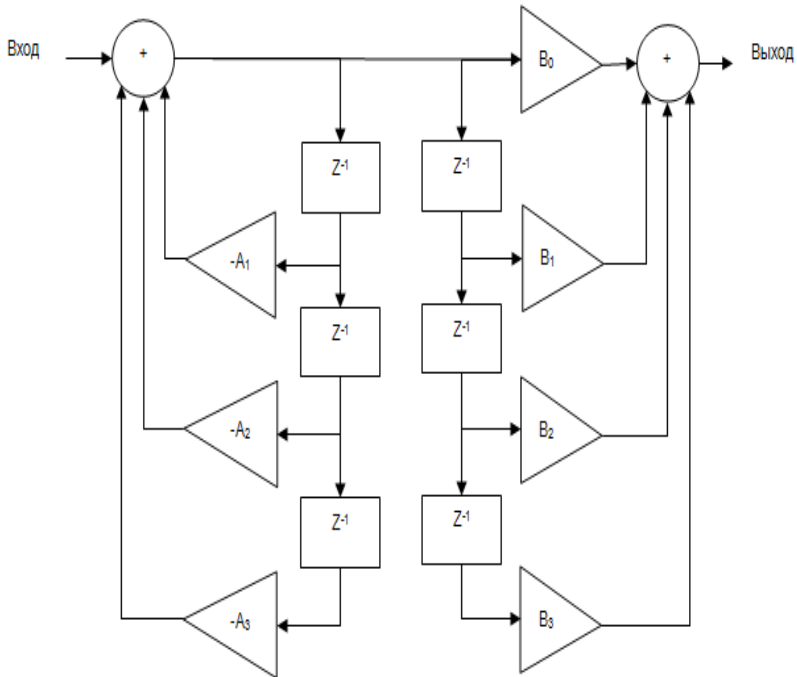
## 8.6. Прямые формы

Прямые формы строятся прямо по разностному уравнению ЦФ. В этой форме фильтр состоит из двух каскадно-соединенных блоков, ответственных за операции числителя и знаменателя  $H(z)$ . При этом всегда сначала выполняется задержка на такт, а затем умножение на коэффициент. В прямой форме 1 первым следует блок операций числителя, а за ним – блок операций знаменателя  $H(z)$ .



Прямая форма 2 отличается от прямой формы 1 порядком размещения блоков: сначала блок операций знаменателя, а затем блок операций числителя  $H(z)$ .

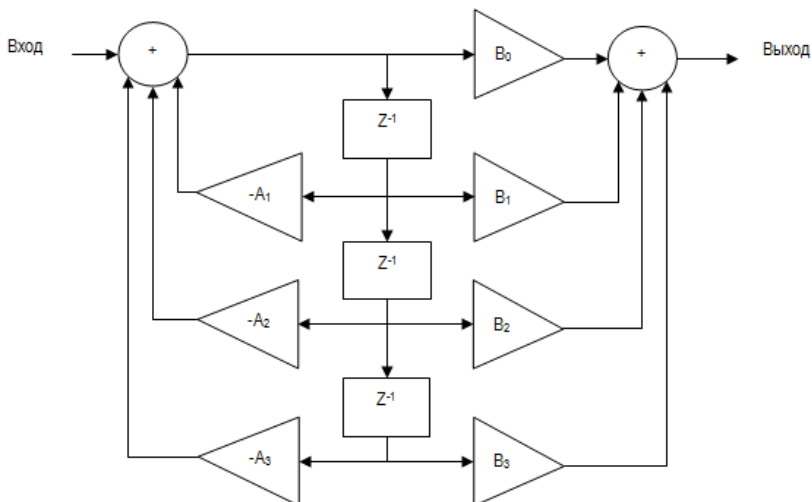




### 8.6.1. Каноническая форма

В прямой форме 2 можно объединить элементы задержки для прямого и обратного сигналов. Это приводит к упрощению структуры и сокращению числа операций задержки на такт. Форма наиболее часто употребляется и поэтому называется и канонической.

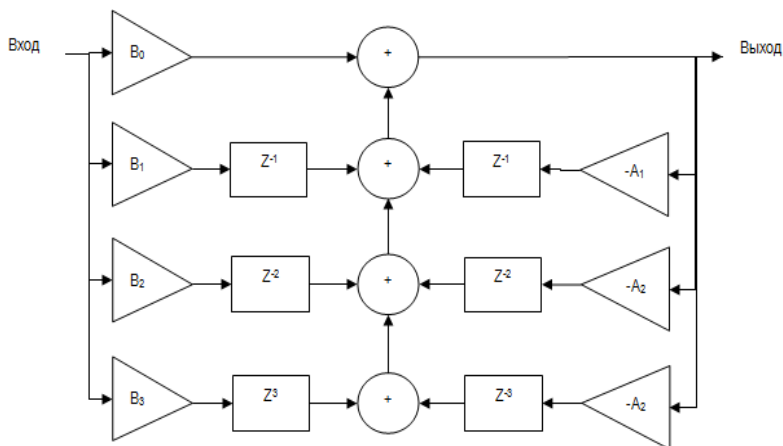
Недостаток прямых и канонической форм – невозможность одновременного выполнения операций сложения, так как они взаимозависимы. Это снижает скорость работы фильтра.



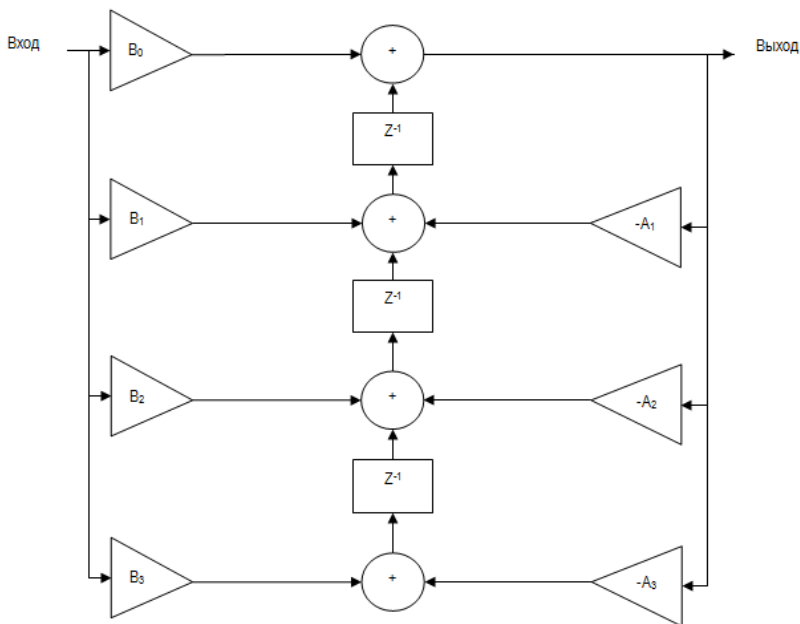
### 8.6.2. Транспонированные формы

Транспонированные формы отличаются от прямых форм изменением порядка выполнения операций: сначала умножения, а затем задержки. Транспонированные формы выгодны при реализации фильтров на процессорах с распараллеливанием вычислений (несколько чувствительных к скорости операций умножения могут выполняться одновременно).

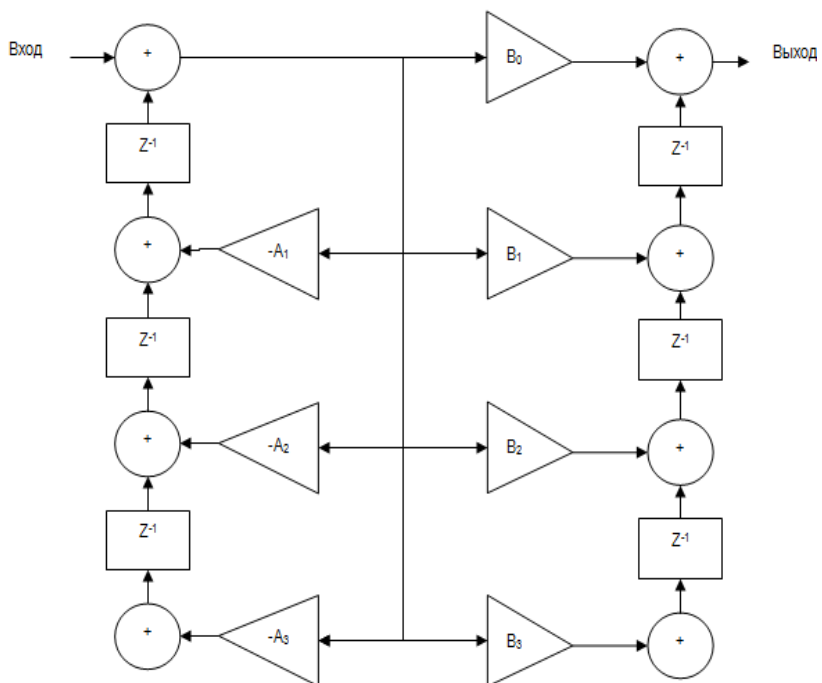
Транспонированная форма 2 получается из прямой формы 1 размещением элементов задержки после каждого множителя так, чтобы суммарные задержки не изменились.



В полученной схеме задержек слишком много и на разные интервалы. Теперь на каждом уровне задержки для слагаемых пропускаем, но делаем задержку для суммы. В итоге получаем структуру



Транспонированная форма 1 получается аналогично из канонической формы, ее недостаток – много элементов памяти.



## 8.7. Проектирование и анализ ЦФ в MATLAB

Для проектирования и анализа ЦФ целесообразно использовать современный инструментарий – систему компьютерной математики (СКМ) MATLAB с встроенной в нее программой имитационного моделирования блочно организованных систем Simulink.

В MATLAB и в ее пакетах расширения собраны практически все данные по современным фильтрам. Для всех фильтров имеются готовые подпрограммы их проектирования и использования. Кроме этого имеются интерактивные системы проектирования и анализа, созданные с использованием графического интерфейса пользователя. К ним относятся:

Программа интерактивно расчета фильтров низких частот.

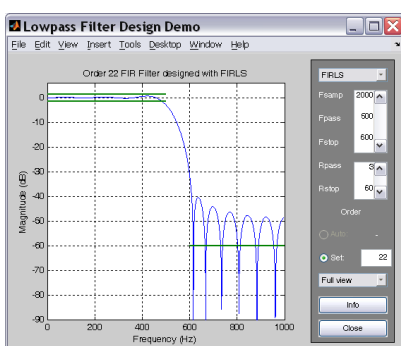
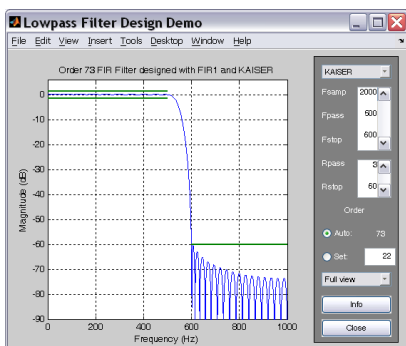
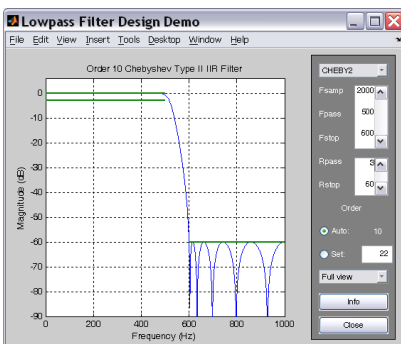
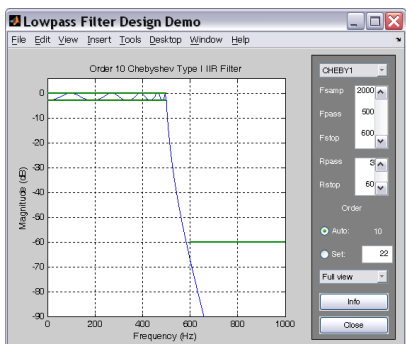
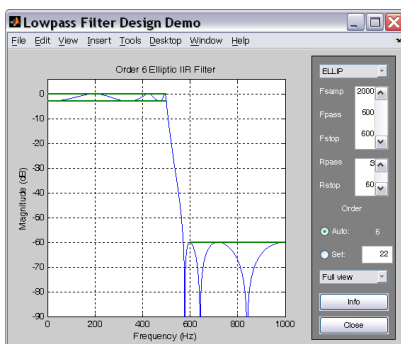
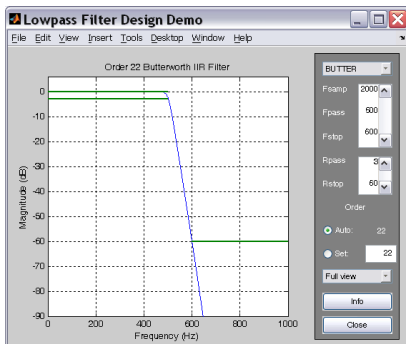
fdatool – инструмент для проектирования и анализа фильтров. Использован в блоке Расчет Цифрового Фильтра (Digital Filter Design) для Simulink. В версии 7.0 СКМ MATLAB блок находится в подбиблиотеке Simulink - Signal Processing Blockset/Filtering /Filter Design. Блок является одновременно и средством расчета ЦФ, и самим фильтром.

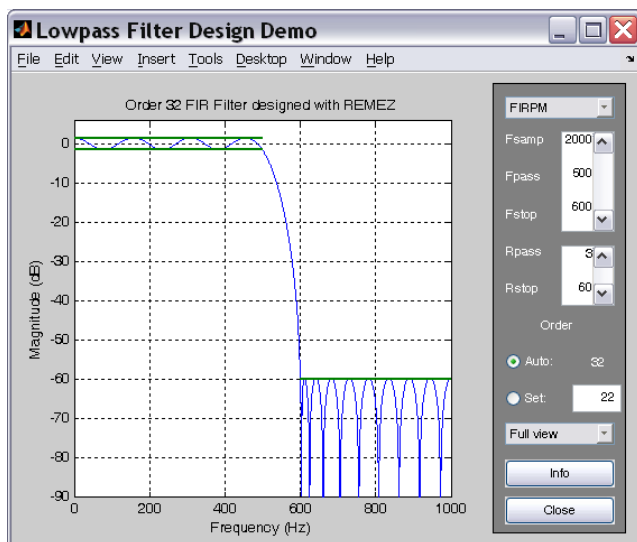
### 8.7.1. Программа интерактивного расчета ФНЧ

Эта программа позволяет пользователю быстро определить требуемый порядок фильтра и выбрать из доступных подходящий фильтр. Программа предоставляет пользователю доступ к окну, в котором размещаются:

- Слева поле визуализации АЧХ. В нем отображаются: АЧХ синим цветом, ограничительные линии для АЧХ зеленым цветом.
- Справа панель для параметров фильтра. В ней размещены:
- Список для выбора типа фильтра, доступны фильтры: БИХ – Баттеворта (Butter), Чебышева 1 (Cheby1), Чебышева 2 (Cheby2), эллиптический (ellip). КИХ– Ремеза(FIRPM), наименьших квадратов (FIRLS), с окном Кайзера (Kaiser).
- Поле выбора частот дискретизации  $F_{\text{samp}}$ , границы полосы пропускания  $F_{\text{pass}}$ , границы полосы задерживания  $F_{\text{stop}}$ .
- Поле выбора затухания в полосе пропускания  $R_{\text{pass}}$  и задерживания  $R_{\text{stop}}$ .
- Поля порядка Order с возможностью автоматического вычисления Auto и принудительного задания Set.
- Список выбора области визуализации, можно отображать полосу пропускания (Passband), полосу задерживания (Stopband) и все (Full view).
- Кнопка вызова информации по программе.

Ниже приведены результаты расчетов разных фильтров при одинаковых требованиях:  $F_{\text{samp}}=2000$ ,  $F_{\text{pass}}=500$ ,  $F_{\text{stop}}=600$ ,  $R_{\text{pass}}=3\text{дБ}$ ,  $R_{\text{stop}}=50\text{дБ}$ , расчет порядка автоматический.





## 8.7.2. fdatool – инструмент для проектирования фильтров

Инструмент в интерактивном режиме обеспечивает ввод данных ЦФ, его расчет, запоминание рассчитанных параметров в среде MATLAB в структурированной переменной с именем фильтра и контрольный просчет фактически получаемых характеристик. Рассчитанные параметры ЦФ затем могут использоваться в модели Simulink путем обращения к этой переменной.

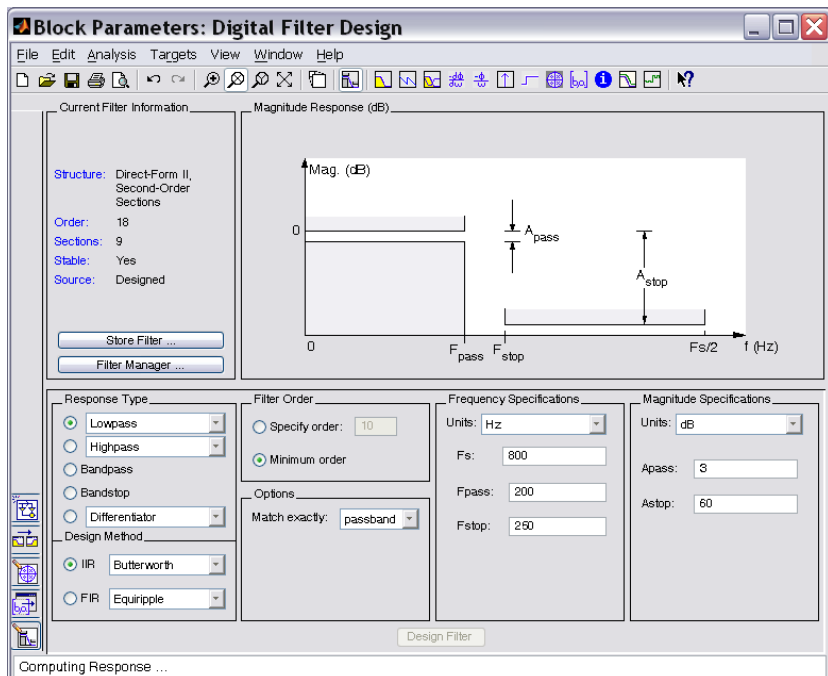
При расчете ЦФ в начале нужно сделать его спецификацию: выбрать тип фильтра, задать требования к частотным характеристикам (АЧХ и ФЧХ), метод расчета, выбрать структуру фильтра.

Тип АЧХ фильтра. Возможны фильтры: (ФНЧ – фильтр низкой частоты, ФВЧ – фильтр высокой частоты, ПФ – полосно-пропускающий фильтр, РФ – полосно-задерживающий фильтр, интегратор, дифференциатор).

Требования к АЧХ и ФЧХ. Нужно задать границы полос пропускания и задерживания, допустимую неравномерность в полосе пропускания, гарантированное затухание в полосе задерживания. Если требуется линейная ФЧХ, то выбираются методы расчета определенного класса КИХ фильтров.

Метод расчета ЦФ основан на применении определенных алгоритмов для нахождения нулей и полюсов его передаточной функции. В СКМ MATLAB используется большой набор ЦФ, для каждого из которых построены встроенные функции, реализующие метод расчета. Определены различные методы для БИХ и КИХ фильтров.

Окно инструмента содержит поля для выбора параметров фильтра и встроенное графическое окно визуализации результатов. Содержимое полей взаимозависимо. Например, при выборе типа фильтра меняется содержание полей доступных методов расчета и ввода параметров.



В окне параметров размещены:

- В поле информации о рассчитываемом фильтре (Current Filter Information) выводятся структура, порядок и др. В последних версиях все ЦФ строятся в каскадной форме из биквадратных звеньев, структура которых регулируется.
- Поле визуального отображения содержит данные, тип которых выбирается кнопками в панели инструментов. Можно увидеть спецификации АЧХ (на рисунке), АЧХ, ФЧХ, АЧХ+ ФЧХ, ИХ, ПХ и др.
- В поле типа фильтра (Response Type) выбирается вид фильтра по частотной области (для каждого фильтра из списка можно выбрать конкретный):  
 Нижних частот ФНЧ (Lowpass).  
 Верхних частот ФВЧ (Highpass).  
 Полосно-пропускающий ПФ (Bandpass).  
 Полосно-задерживающий (режекторный) ПФ (Bandstop).

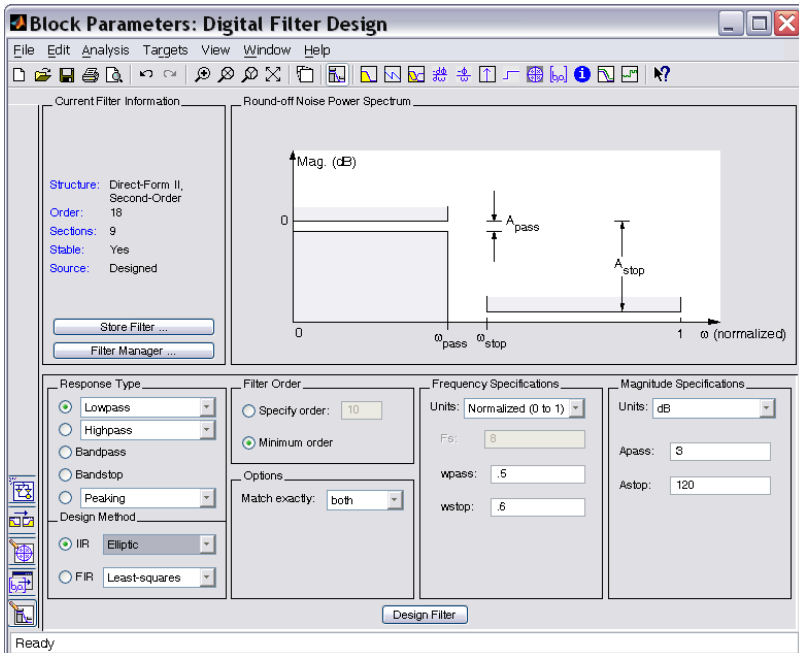


Другой.

- В поле метода расчета фильтра (Design Method) выбирается математическое описание фильтра. Выбор производится из списка, содержание которого зависит от типа фильтра.
- В поле задания порядка фильтра (Filter Order) можно задать фиксированный порядок (Specify order) или минимально возможный (Minimum order). В первом случае параметры могут не соответствовать заданным, во втором случае порядок будет вычислен по заданным требованиям.
- В поле опций (Option), если они имеются, можно задать уточняющие параметры.
- В поле данных о частотах (Frequency Specification) задаются единицы измерения частот (Units), частота дискретизации  $F_s$ , граница полосы пропускания  $F_{pass}$ , граница полосы задерживания  $F_{stop}$ .
- В поле требований к АЧХ (Magnitude Specification) задаются единицы измерения (Units), неравномерность в полосе пропускания  $A_{pass}$ , гарантированное затухание в полосе задерживания  $A_{stop}$ .
- Кнопка расчета фильтра (Design Filter).

Слева размещены кнопки вызова дополнительных операций:

- Создания модели для Simulink. Будет создана новая модель, в которую будет помещен рассчитанный фильтр.
- Установить параметры квантования коэффициентов.
- Преобразования фильтра.
- Редактирования карты полюсов и нулей.



В окне визуального отображения вначале лучше выбрать спецификации АЧХ фильтра, подсказывающие смысл требуемых параметров. Затем в перечисленных полях нужно задать параметры фильтра и запустить подпрограмму расчета, нажав кнопку Design Filter в нижней области окна. После расчета графическое окно автоматически переключается на отображение АЧХ фильтра, а в информационном окне отображаются параметры фильтра. В примере получился фильтр 18 порядка из 9 биквадратных звеньев, каждое из которых использует прямую форму 2.

С помощью кнопок панели инструментов можно посмотреть карту полюсов и нулей фильтра на z-плоскости и желаемую характеристику фильтра.

С помощью кнопок панели инструментов можно посмотреть и список коэффициентов фильтра. Для БИХ ЦФ применяется каскадная структура, в которой используются биквадратные блоки с междублочным масштабированием. Коэффициенты выводятся в формате:

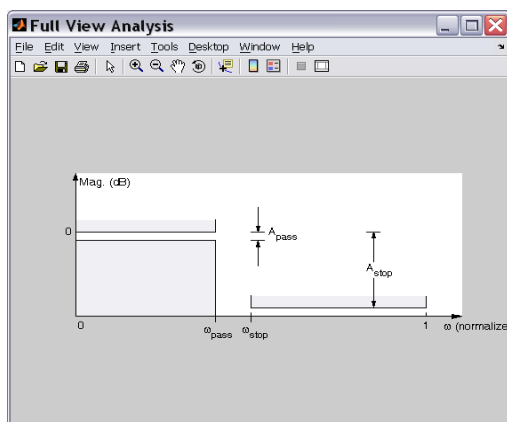
- Сначала матрица из 6 столбцов, в которых размещены коэффициенты  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Для каждого биквадратного блока строка.
- Затем список масштабирующих коэффициентов.

В качестве примера рассмотрим проектирование ФНЧ с параметрами:

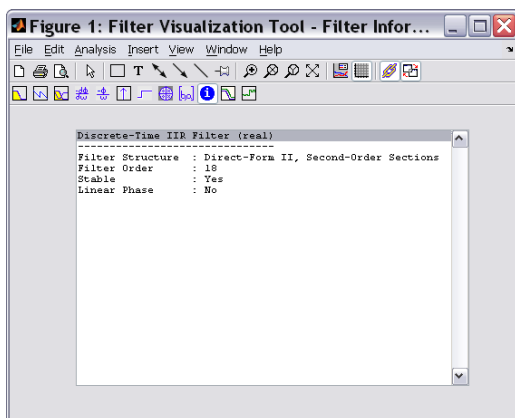
- $W_{pass}=0.5$  от половинки частоты дискретизации,
- $W_{stop}=0.6$  от половинки частоты дискретизации,
- $A_{pass}=3$  дБ,
- $A_{stop}=120$  дБ.

При проектировании выбран эллиптический ФНЧ. Результат синтеза - порядок 10, биквадратных секций 5. Ниже представлены результаты расчетов:

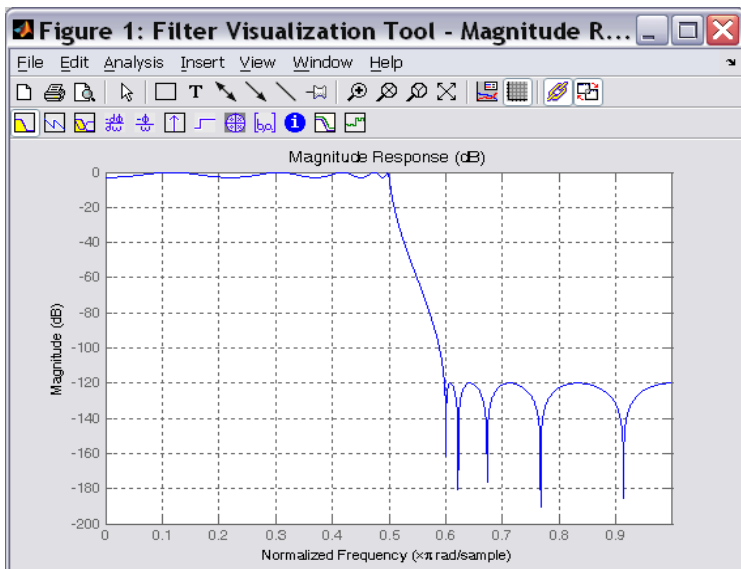
- Спецификация фильтра



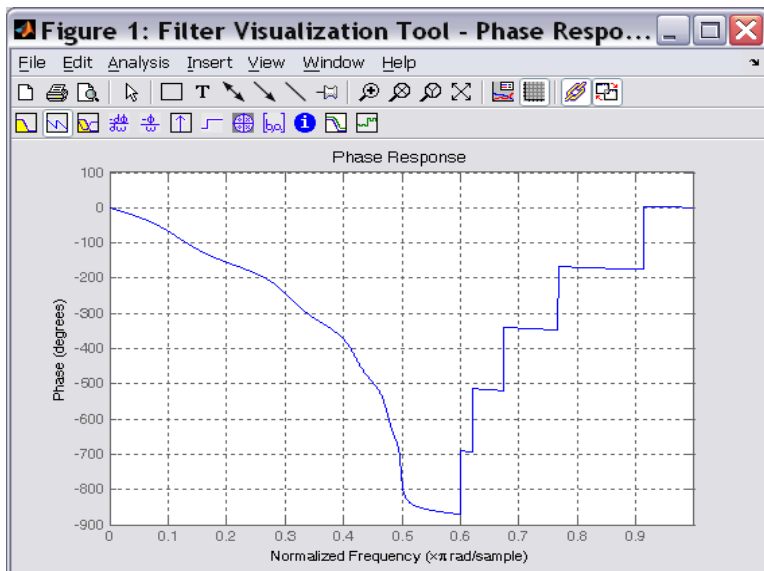
- Информация о фильтре
- 



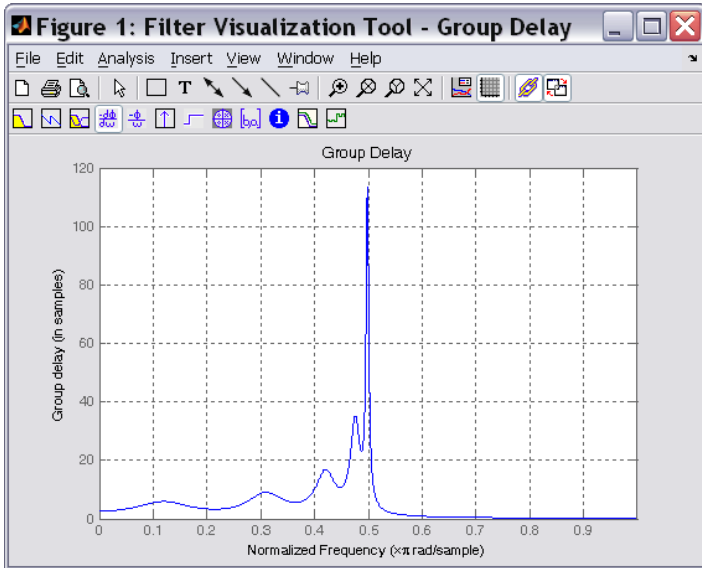
- АЧХ фильтра



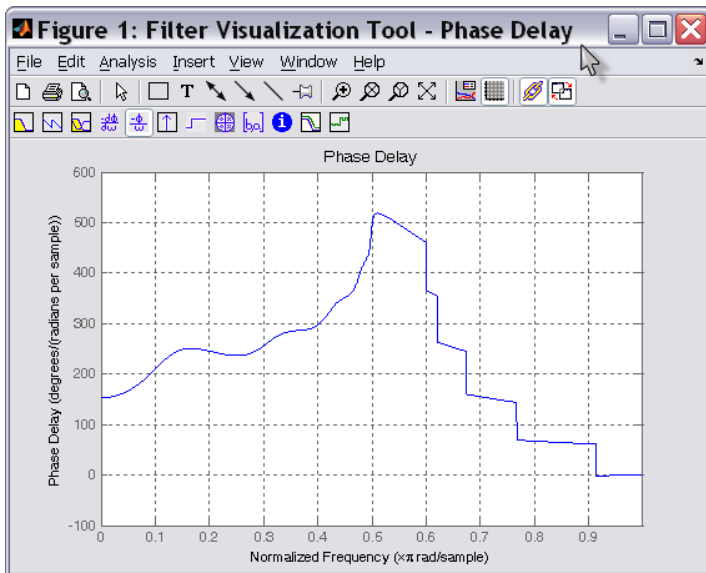
- ФЧХ фильтра



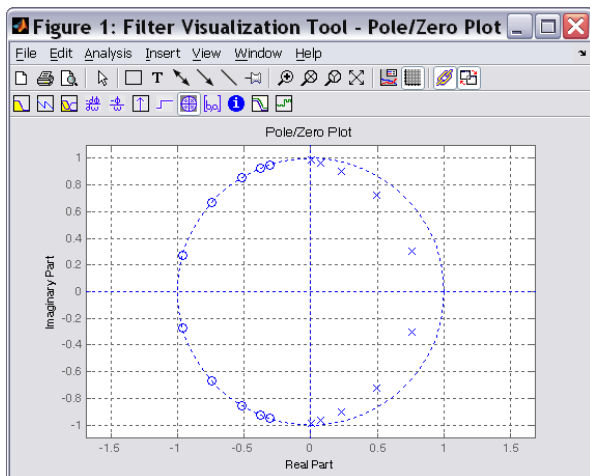
- Групповое запаздывание



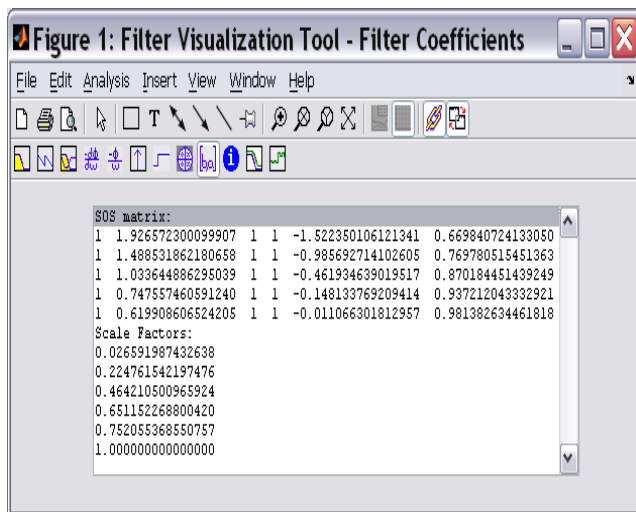
- Запаздывание по фазе



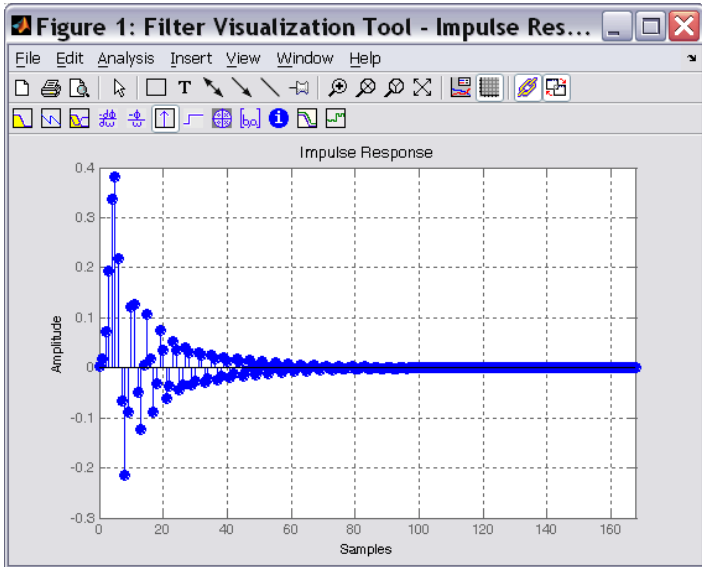
- Карта полюсов и нулей. Полюса отображены крестиками, нули кружочками.



- Коэффициенты фильтра в каскадной реализации. Сначала выводится матрица коэффициентов звеньев, в которой каждому биквадратному звену соответствует строка, где коэффициенты расположены в последовательности  $B_0, B_1, B_2, A_0, A_1, A_2$ . Затем список масштабирующих коэффициентов, делающих усиления каждого звена единичными.



- Импульсная характеристика.



- Переходная характеристика.

